1952 г. Сентябрь *Т. XLVIII, вып. 1*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

О НЕКОТОРЫХ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИНАХ ДЛЯ СМЕСИ

И. Г. Шапошников

В заметке предлагается один из возможных способов изложения при введении некоторых основных гидродинамических величин для смеси, а именно: плотности массы, плотности потока массы и гидродинамической скорости. Заметка преследует только дидактические цели; поводом для такого рода обсуждения вопроса об определении указанных гидродинамических величин послужило появление в печати ряда работ [1—3], исходящих из неправильных представлений об этих величинах даже в простом случае чистой среды, на что уже было обращено внимание [4].

1. Рассмотрим гидродинамическую среду (жидкость или не слишком разреженный газ), состоящую из разных по своим свойствам молекул, т. е. являющуюся смесью нескольких компонент. Для количественной характеристики макроскопического пространственного распределения массы, макроскопического движения и макроскопического переноса массы в этой среде вводятся, соответственно, плотность массы ρ, гидродинамическая скорость $\mathbf{v}$ и плотность потока массы $\mathbf{j}$ среды. Как определить эти величины с молекулярной точки зрения?

2. Плотность массы ρ следует, конечно, определить как отношение массы физически бесконечно малого элемента среды к объёму этого элемента. Если m_s есть масса молекулы s-й компоненты, а ν_s и $\rho_s = \nu_s m_s$ — соответственно плотность молекул и плотность массы этой компоненты, определённые как отношения числа таких молекул в рассматриваемом физически бесконечно малом элементе среды и их массы к объёму этого элемента, то мы будем, очевидно, иметь:

$$\rho = \Sigma \rho_s = \Sigma \nu_s m_s . \qquad (1)$$

3. Гидродинамическую скорость $\mathbf{v}$ нужно определить как скорость центра инерции физически бесконечно малого элемента среды — только тогда уравнение движения среды может быть получено, как обычно, путём приравнивания друг другу суммы сил, действующих на физически бесконечно малый элемент среды, и произведения массы этого элемента на субстанциональную производную гидродинамической скорости по времени. Обозначим через $\mathbf{u}_s$ среднюю скорость молекул s-й компоненты по совокупности этих молекул в рассматриваемом физически бесконечно малом элементе среды; легко убедиться, что

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\rho} \Sigma \rho_s \mathbf{u}_s. \quad (2)$$

Для случая чистой среды это даёт:

$$\mathbf{v} = \mathbf{u}. \quad (3)$$

4. Для введения плотности потока массы $\mathbf{j}$ определим предварительно плотность потока $\mathbf{I}$ любой скалярной величины, переносимой молекулами среды (см., например, [5]).

Пусть имеем площадку с вектором $d\mathbf{S}$, движущуюся поступательно со скоростью $\mathbf{c}$. За время dt некоторые молекулы проходят через эту площадку в положительном направлении, некоторые — в отрицательном. Пусть движение молекул каждой компоненты сопровождается перенесением этими молекулами некоторой аддитивной скалярной величины $Q(\Gamma_s)$ (массы, кинетической энергии и т. д.), определяемой совокупностью величин Γ_s, вполне характеризующих состояние молекулы рассматриваемой компоненты. Обозначим через dQ_+ и dQ_- значения величины Q, переносимые за время dt через рассматриваемую площадку в положительную и в отрицательную стороны соответственно и назовём $dQ \equiv dQ_+ - dQ_-$ полным значением величины Q, переносимым через эту площадку в положительном направлении. Разделив dQ на dS и на dt, мы получим естественную количественную характеристику переноса величины Q молекулами среды через рассматриваемую площадку. Плотность потока $\mathbf{I}$ величины Q следует, очевидно, определить как такой вектор, что его составляющая I_n, нормальная к рассматриваемой площадке, равна указанной выше количественной характеристике переноса величины Q через эту площадку.

Рассмотрим сначала случай чистой среды. Обозначим через $n(\Gamma)\,d\Gamma\,dV$ число молекул «сорта Γ» в объёме dV около рассматриваемой точки в рассматриваемый момент. Возьмём около этого момента настолько малый промежуток времени dt, чтобы можно было считать, что в течение него скорости подавляющего большинства молекул около рассматриваемой точки не изменяются сколько-нибудь значительно. Для dQ будем, очевидно, иметь:

$$dQ = dS\,dt \int Q(\Gamma)(u_n - c_n)\,n(\Gamma)\,d\Gamma = dS\,dt\,\nu\,\overline{Q(\Gamma)(u_n - c_n)}, \quad (4)$$

где u_n и c_n — нормальные к рассматриваемой площадке составляющие молекулярной скорости $\mathbf{u}$ и скорости площадки $\mathbf{c}$, ν — число молекул, приходящееся на единицу объёма около рассматриваемой точки в рассматриваемый момент, и черта обозначает усреднение по совокупности молекул в физически бесконечно малом элементе среды, взятом около этой точки в этот момент. Из (4) теперь следует:

$$\mathbf{I} = \nu\,\overline{Q(\Gamma)(\mathbf{u} - \mathbf{c})}. \quad (5)$$

В случае смеси такое же рассмотрение может быть проведено для каждой из компонент, и так как, очевидно, $dQ = \Sigma dQ_s$, то

$$\mathbf{I} = \Sigma \nu_s\,\overline{Q(\Gamma_s)(\mathbf{u}_s - \mathbf{c})}, \quad (6)$$

где черта означает усреднение по совокупности молекул s-й компоненты в рассматриваемом физически бесконечно малом элементе среды.

Если ввести скорости $\mathbf{w}_s \equiv \mathbf{u}_s - \mathbf{v}$, характеризующие беспорядочную часть молекулярного движения, то даваемую (6) плотность потока величины Q можно разбить на микроскопическую и макроскопическую части:

$$\mathbf{I} = \Sigma \nu_s\,\overline{Q(\Gamma_s)\mathbf{w}_s} + (\mathbf{v} - \mathbf{c})\,\Sigma \nu_s\,\overline{Q(\Gamma_s)} \equiv \mathbf{I}_{\text{микро}} + \mathbf{I}_{\text{макро}}. \quad (7)$$

5. Чтобы получить выражение для плотности потока массы $\mathbf{j}$, нужно положить в (7) $Q(\Gamma_s) = m_s$, что даёт с учётом (1):

$$\mathbf{j}_{\text{микро}} = \Sigma \rho_s \overline{\mathbf{w}_s}, \quad \mathbf{j}_{\text{макро}} = \rho(\mathbf{v} - \mathbf{c}). \quad (8)$$

Но в силу (1) и (2) $\mathbf{j}_{\text{микро}} = 0$, так что окончательно:

$$\mathbf{j} = \rho(\mathbf{v} - \mathbf{c}); \quad (9)$$

в частности, если рассматриваемая площадка покоится ($\mathbf{c} = 0$), то:

$$\mathbf{j} = \rho\,\mathbf{v}. \quad (10)$$

Из (9) видно, что поток массы через площадку, движущуюся вместе со средой ($\mathbf{c} = \mathbf{v}$), равен нулю; в частности, равен нулю поток массы через площадку, покоящуюся в покоящейся жидкости ($\mathbf{c} = \mathbf{v} = 0$).

Таким образом, как в случае чистой среды, так и в случае смеси для плотности потока массы, независимо от того, какими причинами вызывается перенос массы, имеет место выражение (10) (для случая покоящейся площадки), так что является неправильным утверждение авторов упомянутых в начале этой заметки работ[1-3] о том, что в выражении для плотности потока массы в случае чистой среды должны быть, кроме члена $\rho \mathbf{v}$, ещё члены, пропорциональные градиенту плотности и градиенту температуры, которыми должны, по мнению авторов этих работ, учитываться «самодиффузионные явления» в чистой среде. Заметим, что для доказательства неправильности этого утверждения нет надобности обращаться к кинетическому уравнению, как это было сделано ранее[4].

6. При изучении диффузионных явлений, о которых имеет смысл говорить, конечно, только в случае смеси, нужно найти выражение не для полной плотности потока массы $\mathbf{j}$, а для плотности потока массы $\mathbf{j}_k$ какой-то одной k-й компоненты. Для этого нужно написать выражение (5) для k-й компоненты и положить в нём $Q_k(\Gamma_k) = m_k$; для случая $\mathbf{c}=0$ это даёт:

$$\mathbf{j}_k = \nu_k m_k \overline{\mathbf{u}_k}, \tag{11}$$

где черта означает усреднение по совокупности молекул k-й компоненты в физически бесконечно малом элементе среды. Вводя $\mathbf{w}_k \equiv \mathbf{u}_k - \mathbf{v}$ и учитывая, что $\nu_k m_k = \rho_k$, из (11) получаем:

$$\mathbf{j}_k = \rho_k \mathbf{v} + \rho_k \overline{\mathbf{w}_k} \equiv \mathbf{j}_{k\,\text{макро}} + \mathbf{j}_{k\,\text{микро}}; \tag{12}$$

таким образом, плотность потока массы k-й компоненты складывается из макроскопической, конвекционной части $\mathbf{j}_{k\,\text{макро}} = \rho_k \mathbf{v}$ и микроскопической, диффузионной части $\mathbf{j}_{k\,\text{микро}} = \rho_k \overline{\mathbf{w}_k}$, обусловленной неодинаковостью состава и состояния среды в разных точках.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Н. А. Слезкин, ДАН **77**, 205, 1951; ДАН **79**, 33, 1951; Вестник МГУ, № **10**, 3, 1951.
2. С. В. Валландер, ДАН **78**, 25, 1951; ПММ **15**, 409, 1951.
3. С. В. Валландер и М. П. Еловских, ДАН **79**, 37, 1951.
4. И. Г. Шапошников, ЖЭТФ **21**, 1309, 1951.
5. S. Chapman a. T. Cowling, The mathematical theory of now—uniform gases. Cambr. Univ. Press, 1939.