Условия

Задача 1. В первом акте

Антон Павлович Чехов однажды заметил, что висящее на стене ружьё можно моделировать однородным стержнем длины l, на концах которого закреплена верёвка длины $L > l$. Верёвка перекинута через забитый в стену гладкий гвоздь. Найдите положения равновесия системы и исследуйте их на устойчивость.

Задача 2. А может быть, планета?

Жители пластилиновой планеты Maximus осознали, что пришло время инновационных перемен. Они планируют изменить форму своей планеты таким образом, чтобы в определённой точке поверхности — в столице — гравитационное поле было как можно больше. Определите форму их новой планеты, а также во сколько раз возрастёт гравитационное поле в столице после дорогостоящих инноваций. Считайте, что старый Maximus был сделан из несжимаемого пластилина плотностью ρ и имел форму шара с радиусом R.

Задача 3. Система уравнений

Рассмотрим систему уравнений на неизвестные функции $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$.

$$\begin{aligned}
&a' + x^2 b' &&= x(c + b - 4),\\
&a' - c' &&= 2x(2a - c + 1),\\
&2a' - (1 - x^2)b' &&= x(c - b - 4),\\
&b' - c' &&= 4xb.
\end{aligned}$$

Найдите решение этой системы, удовлетворяющее начальным условиям $a(0) = 2$, $b(0) = 1$, и определите значения $a(1)$, $b(1)$, $c(1)$ с абсолютной погрешностью, не превышающей 0,001.

Задача 4. Изворотливый квадрат

Некто взял квадрат со стороной a и массой M и прибил гвоздём через середину к вертикальной стене, стоящей над пропастью, так что две стороны квадрата оказались строго вертикальны. На верхнюю сторону квадрата в точности над гвоздём положил точку массы

m и малым импульсом вывел точку из равновесия, так что она поехала по стороне квадрата. Считая, что всё абсолютно гладкое: даже ржавый гвоздь, деревянная стенка, однородный квадрат и маленькая точка, найдите с абсолютной погрешностью не более 10^{-4} при каком соотношении масс $\mu = m/M$ эта точка успеет достичь вершины квадрата, прежде чем сгинуть в пропасти.

Задача 5. Тише едешь — дальше будешь

Космический корабль выведен на геостационарную орбиту Земли. В некоторый момент капитан корабля включает ионный двигатель, тяга которого во всё дальнейшее время движения сонаправлена со скоростью корабля, постоянна по модулю и позволяет кораблю развивать ускорение равное $a = 0{,}5$ мм/с^2. Считая гравитационное поле Земли центральным, массу корабля сосредоточенной в его центре масс, и пренебрегая действием иных сил, кроме тяги двигателя и гравитации, а также расходом массы:

1. Качественно опишите дальнейшую траекторию корабля;
2. Найдите минимальную скорость $u_{\min}$ корабля за всё время его движения;
3. Рассчитайте, на каком расстоянии от Земли и через какое время корабль достигнет параболической скорости, какова при этом будет скорость корабля?

Период обращения Земли вокруг своей оси $T = 86\,164$ с, геоцентрическая гравитационная постоянная $\Gamma = \gamma M_З = 398{,}6005 \cdot 10^{12}$ м^3/с^2. Ответы должны быть приведены с относительной погрешностью не более 0,1 %.

Задача 6. Эффект домино

Определите скорость распространения волны в эффекте домино. Высота костяшки домино $h = 50$ мм, толщина $d = 8$ мм, расстояние между костяшками $l = 35$ мм (рис. 1). Костяшки не проскальзывают по поверхности, трение между костяшками отсутствует, а удары между костяшками абсолютно неупру-

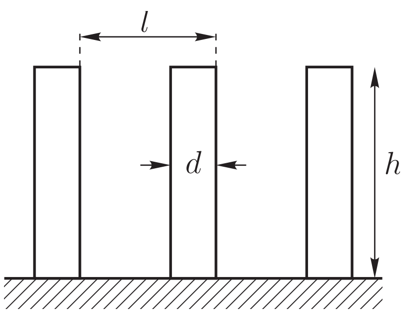

Рис. 1

гие. Ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2. Погрешность ответа не должна превышать 0,1 %.

Задача 7. Пришла весна

Пришла весна, и наконец-то начал таять снег. В одном небольшом городе на реке находится плотина K. До плотины река разветвляется (рис. 2). Везде в точках A, B, D, E находятся горы со снежными вершинами. Известно, что на каждой горе тает снег так, что уровень воды h на AC, BC, DF и EF постоянен и равен $h_1 = 18$ м. Длина участков реки указаны на рисунке, $L = 1$ км. Перепады высот между соседними точками везде одинаковы и равны $H = 5$ м. Ширина каждого участка реки $b = 100$ м.

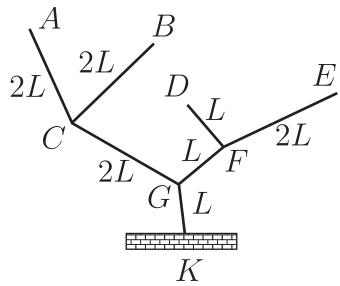

Рис. 2

1. Нужно ли эвакуировать жителей города живущих рядом с плотиной, если пропускная способность плотины постоянна и равна $q_0 = 7 \cdot 10^4$ кг/с?
2. Находчивые жители сделали перед плотиной прямоугольный резервуар. Площадь его дна $S = 10^4$ м^2, пропускная способность плотины зависит от высоты воды в резервуаре:

$$q(h) = q_0 \exp\left(\frac{h^2}{h_{\max}^2}\right),$$

а плотина способна выдержать уровень жидкости до $h_{\max} = 40$ м. Через какое время вода перельётся через плотину, если в начальный момент времени в резервуаре не было воды? Приведите ответ с погрешностью не более 0,1 %.

Указание. Считайте воду в реке несжимаемой жидкостью с вязкостью $\mu = 100$ м^2/с и не содержащей примесей. Движение на отдельном участке реки считайте одномерным и стационарным. Ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/c^2.

Решения

Задача 1. В первом акте

В положении равновесия момент силы тяжести ружья относительно гвоздя равен нулю, что означает, что центр масс ружья O располагается под гвоздём C, а высота $h = |OC| = r$ (рис. 3).

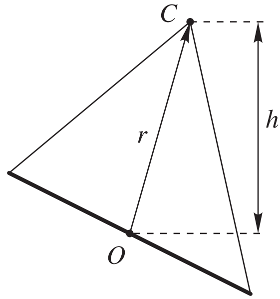

Рис. 3

Перейдём в систему отсчёта жёстко связанную с ружьём. В этой системе отсчёта геометрическое место возможных положений гвоздя — эллипс — геометрическое место точек, сохраняющих сумму расстояний до концов ружья (рис. 4).

Поскольку потенциальная энергия системы $U = mgh = mgr$ линейно зависит от расстояния r, то положениям гвоздя с постоянной потенциальной энергией будут соответствовать окружности.

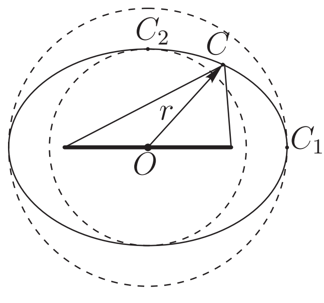

Рис. 4

В результате, положения равновесия будут в точках касания геометрического места возможных положений точек гвоздя с эквипотенциальными кривыми. Причём внутреннее касание C_1 будет соответствовать неустойчивому положению равновесия, а внешнее C_2 — устойчивому. Это можно увидеть, заметив, что точки эллипса могут быть заданы координатами $\vec{r} = (a\cos\varphi, b\sin\varphi)$, а значит, в устойчивом равновесии у потенциальной энергии есть строгий минимум, а в неустойчивом — строгий максимум.

Окончательно получим, что ружьё будет находиться в устойчивом положении равновесия, когда оно будет вертикально располагаться под гвоздём. Горизонтальное расположение ружья — неустойчивое положение равновесия.

Задача 2. А может быть, планета?

Предположим, что мы нашли оптимальную форму планеты. Обозначим столицу как точку A. Ось x направим вдоль поля в этой точке. Маленький кусочек пластилина δm на фиксированном расстоянии r от A будет вносить больший вклад, если он расположен ближе к прямой x (больше величина проекции). Отсюда следует, что форма должна быть симметрична относительно вращения вокруг прямой x и в планете не будет полостей.

Снова рассмотрим два маленьких кусочка пластилина δm, но теперь в произвольных точках поверхности (рис. 5). Каждый из них даёт вклад в конечное поле, соответсвенно

$$\delta f_1 = \frac{\delta m}{r_1^2}\cos\varphi_1,$$
$$\delta f_2 = \frac{\delta m}{r_2^2}\cos\varphi_2.$$

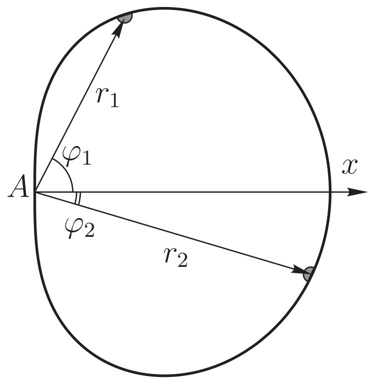

Рис. 5

Предположим, что $f_1 > f_2$, тогда если переместить второй кусочек к первому, то результирующее поле возрастет, а это значит, что такая форма не оптимальна[1]. Аналогично, если $f_2 > f_1$. Отсюда заключаем, что в «правильной» форме $f_1 = f_2$, и получаем уравнение на искомую поверхность:

$$\frac{\cos\varphi}{r^2} = \mathrm{const} = \frac{1}{S}.$$

Осталось определить константу S из сохранения объёма пластилина. Для этого можно проинтегрировать диски толщиной dx и радиуса $a = r\sin\varphi$ вдоль оси x. Так как $x = r\cos\varphi = r^3/S$, то:

$$a^2 = r^2\sin^2\varphi = r^2 - x^2 = (xS)^{2/3} - x^2.$$

[1] Отклонение результирующего поля от оси x вносит изменение второго порядка по δm.

Сам объём:

$$V = \frac{4\pi}{3}R^3 = \int\limits_0^{\sqrt{S}} \pi\left((xS)^{2/3} - x^2\right)dx = \frac{4\pi}{15}S^{3/2},$$

$$S = 5^{2/3}R^2.$$

На рисунке 6 показана новая форма планеты при $R = 1$.

Чтобы вычислить гравитационное поле в столице, разобьём планету на слои $r^2/\cos\varphi = s = \text{const}$. Масса такого слоя dm:

$$dm = \rho\, dV = \rho\frac{2\pi}{5}\sqrt{s}\, ds,$$

а все точки слоя дают одинаковый вклад в проекцию гравитационного поля в точке A, равный $\delta m/s$. Таким образом:

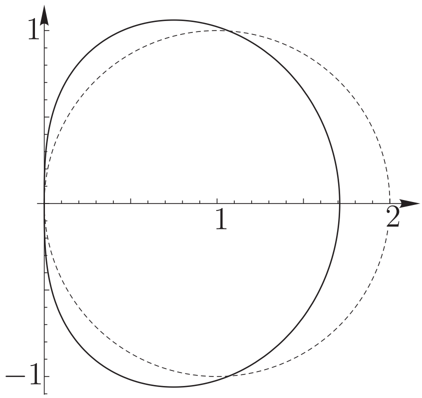

Рис. 6

$$f' = \int\limits_0^S \rho\frac{2\pi}{5\sqrt{s}}ds = \rho\frac{4\pi}{5}\sqrt{S} = \rho\frac{4\pi}{5^{2/3}}R.$$

Принимая во внимание, что у сферической планеты поле на поверхности $f_0 = 4\pi\rho R/3$, получаем, что после дорогостоящих инновационных изменений гравитационное поле в столице увеличилось в

$$\frac{f'}{f_0} = \frac{3}{5^{2/3}} = 1{,}026 \text{ раз}, \qquad \text{или на } 2{,}6\,\%.$$

Задача 3. Система уравнений

Данную систему, ввиду её простоты, можно решить многими способами. Мы изложим метод, позволяющий аналитически найти решение (если оно существует!) любой переопределённой системы линейных уравнений первого порядка.

Запишем систему в виде системы линейных алгебраических уравнений относительно производных:

$$A\begin{pmatrix} a' & b' & c' \end{pmatrix}^T = Y, \tag{1}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x^2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & x^2-1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} x(b+c-4) \\ 2x(2a-c+1) \\ x(c-b-4) \\ 4xb \end{pmatrix}.$$

Правая часть Y не содержит производных неизвестных фунций. Так как $\operatorname{rang} A = 3$, для существования решения системы (1) необходимо, чтобы ранг матрицы $\begin{pmatrix} A|Y \end{pmatrix}$ также был равен 3, то есть эта матрица была вырождена. Значит:

$$\det\begin{pmatrix} A|Y \end{pmatrix} = 0.$$

Раскрывая детерминант, получаем алгебраическое соотношение на неизвестные функции:

$$c = 2a - b + 1.$$

Подставляя это соотношение в исходную систему, получим

$$a' + x^2 b' = x(2a-3), \tag{2}$$

$$b' - a' = 2xb, \tag{3}$$

$$2a' - (1-x^2)b' = x(2a-2b-3). \tag{4}$$

Четвёртое уравнение совпадает со вторым, его не пишем. Таким образом мы свели систему 4 уравнений на 3 функции к системе 3 уравнений на 2 функции. В общем случае, последовательно уменьшая число уравнений, так можно решить любую переопределенную систему.

Пытаясь действовать аналогично с системой (2–4), мы получим тождестveено нулевой детерминант. Это значит, что система (2–4) вырождена. Действительно, уравнение (2) равно сумме (3) и (4). Так что уравнение (4) можно опустить, и мы получаем обыкновенную (не переопределённую!) систему дифференциальных уравнений на функции a, b. Решая её численно с заданными начальными условиями, получаем ответ:

$$a(1) = 1{,}759, \qquad b(1) = 2{,}538, \qquad c(1) = 2a(1) - b(1) + 1 = 1{,}981.$$

Задача 4. Изворотливый квадрат

Введём неподвижную систему координат, нарисованную на стене, с осями x и y и систему координат, нарисованную на квадрате с осями ξ и η (тоже самое, но по-гречески). Дальше нарисуем обобщенные координаты ξ φ в соответствии с рисунком и запишем кинетическую и потенциальную энергии:

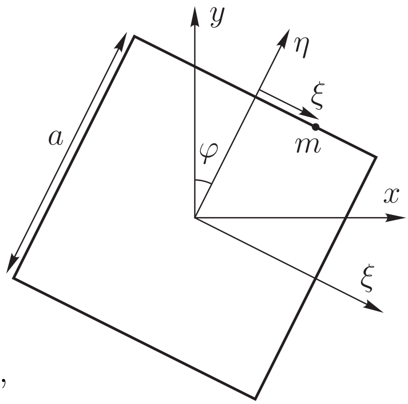

Рис. 7

$$T = \frac{1}{12}Ma^2\dot\varphi^2 + \frac{1}{2}m\left[\left(\frac{a}{2}\dot\varphi + \dot\xi\right)^2 + \xi^2\dot\varphi^2\right],$$

$$\Pi = mg\left(\frac{a}{2}\cos\varphi - \xi\sin\varphi\right).$$

Дальше пригодятся соответствующие уравнения Лагранжа:

$$\frac{Ma^2}{6}\ddot\varphi + \frac{ma}{2}\left(\frac{a}{2}\ddot\varphi + \ddot\xi\right) + 2m\xi\dot\xi\dot\varphi + m\xi^2\ddot\varphi - \frac{mga}{2}\sin\varphi - mg\xi\cos\varphi = 0,$$

$$m\left(\frac{a}{2}\ddot\varphi + \ddot\xi\right) - m\xi\dot\varphi^2 - mg\sin\varphi = 0.$$

Введём безразмерный параметр $\mu = m/M$, безразмерную координату $\varepsilon = \xi/a$ и безразмерное время $\tau = t\sqrt{g/a}$. Выразим вторые производные:

$$\ddot\varphi = \frac{3\mu\varepsilon}{1 + 6\mu\varepsilon^2}\left(2\cos\varphi - \dot\varphi^2 - 4\dot\varepsilon\dot\varphi\right),$$

$$\ddot\varepsilon = \varepsilon\dot\varphi^2 + \sin\varphi - \frac{3\mu\varepsilon}{2(1 + 6\mu\varepsilon^2)}\left(2\cos\varphi - \dot\varphi^2 - 4\dot\varepsilon\dot\varphi\right).$$

Откуда следует, что качественные свойства системы не зависят от стороны квадрата. И, задавая значения параметра μ, можно численно проинтегрировать полученные уравнения.

Найдём условия отрыва точки. Определим все силы, действующие на точку массы m в неинерциальной системе $\xi\eta$. Сила реакции квадрата T_η, пока по нему едет точка, должна компенсировать другие силы: силу тяготения, переносную и кориолисову силы инерции:

$$T_\eta = m\left(g\cos\varphi - \frac{a}{2}\dot\varphi^2 - \xi\ddot\varphi - 2\dot\varphi\dot\xi\right),$$

где производные берутся по исходному времени и пока всё размерное. Переход на новое время τ, координату ε и опускание массы m приводят к выражению:

$$T_\eta = \cos\varphi - \frac{1}{2}\dot\varphi^2 - \varepsilon\ddot\varphi - 2\dot\varphi\dot\varepsilon.$$

Когда T_η становится отрицательной, точка отрывается от квадрата и свободно падает в пропасть. Причём происходит это только в том случае, когда T_η становится отрицательной при $\varepsilon < 1/2$, так как в противном случае точка срывается с квадрата, доскользив до его вершины.

Чтобы предотвратить такое печальное событие нужно, подбирая значение μ, добиться того, чтобы отрыв происходил в точности при $\varepsilon = 1/2$. Для этого можно, например, численно решить уравнение

$$T_\eta|_{\varepsilon=1/2}(\mu) = 0,$$

при этом численное интегрирование можно проводить при нулевых начальных условиях кроме $\dot\varphi_0$, которое можно выбирать достаточно малым: $\dot\varphi_0 = 10^{-6}$. Окончательно получим, что при соотношении масс $\mu < 0{,}3396$ точка успеет достичь вершины квадрата.

Задача 5. Тише едешь — дальше будешь

Определим начальные условия движения системы. Спутник, находящийся на геостационарной орбите, неподвижен относительно вращающейся Земли, поэтому его орбита находится в экваториальной плоскости, а радиус этой орбиты определяется как:

$$r_0 = \left(\frac{T}{2\pi}\sqrt{\Gamma}\right)^{2/3} = 42{,}164 \cdot 10^6 \text{ м}.$$

Гравитационное ускорение на высоте начальной орбиты составляет

$$g = \frac{\Gamma}{r_0^2} = 0{,}2242 \text{ м/с}^2.$$

Пусть r — расстояние от центра притяжения до космического корабля, u — скорость корабля, F — вектор тяги, коллинеарный вектору скорости, угол между направлениями r и u обозначим α.

Введём безразмерные переменные:

$$v = \frac{u}{\sqrt{gr_0}}, \qquad \rho = \frac{r}{r_0}, \qquad \tau = \sqrt{\frac{g}{r_0}}t,$$

и безразмерную величину реактивного ускорения:

$$f = \frac{F}{g} = \frac{a}{g}.$$

Уравнения движения в переменных v, ρ, α примут вид:

$$\frac{dv}{d\tau} = f - \frac{\cos\alpha}{\rho^2}, \qquad \frac{d\rho}{d\tau} = v\cos\alpha, \qquad \frac{d}{d\tau}\cos\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{\rho v}\left(v^2 - \frac{1}{\rho}\right).$$

Первое из этих уравнений — уравнение движения в проекции на касательную к орбите, где f — ускорение вследствие тяги, а второй член в правой части — проекция силы тяготения. Второе уравнение описывает изменение радиальной компоненты скорости корабля. Третье уравнение — уравнение движения в проекции на нормаль к траектории.

Отметим, что для полного определения траектории следует выписать уравнение, описывающее изменение полярного угла:

$$\frac{d}{d\tau}(\rho^2\dot{\varphi}) = f\rho\sin\alpha.$$

Это уравнение может быть проинтегрировано отдельно, если известно решение системы уравнений на v, ρ, α. Впрочем, в условиях рассматриваемой задачи интегрировать это уравнение не нужно.

Для качественного анализа траектории выпишем безразмерную механическую энергию движения

$$h = \frac{v^2}{2} - \frac{1}{\rho}.$$

Продифференцировав это тождество по τ и подставив в результат дифференцирования $\dot{v}$ и $\dot{\rho}$, получим:

$$\frac{dh}{d\tau} = fv.$$

Ясно, что при малых значениях ускорения f на одном витке траектория будет мало отличаться от круговой орбиты, которая получилась бы при $f = 0$. Но в силу монотонного увеличения энергии (а следовательно и большой полуоси результирующей кеплеровской орбиты), на начальном участке корабль движется вокруг Земли по раскручивающейся спирали.

Начальная орбита по условию выбрана круговой, а f — мало. Если траектория приближённо является кеплеровой круговой орбитой, то должно выполняться равенство:

$$v^2 = \frac{1}{\rho}, \qquad \text{откуда} \qquad h = \frac{v^2}{2} - \frac{1}{\rho} = -\frac{v^2}{2}, \qquad \text{и значит} \qquad \frac{dv}{d\tau} = -f.$$

Последнее уравнение показывает, что несмотря на то, что к спутнику приложена сила, сонаправленная с вектором его скорости, эта скорость (в среднем) будет уменьшаться. Уменьшение в среднем скорости спутника будет происходить, пока его энергия $h < 0$. В силу монотонного увеличения h энергия обязательно достигнет нулевого значения за конечное время и будет продолжать увеличиваться. Однако при $h > 0$ из уравнений движения следует

$$\frac{d}{d\tau}\cos\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{\rho v}\left(\frac{v^2}{2} + h\right),$$

а значит монотонное увеличение $\cos\alpha$. Из второго уравнения движения получим неограниченный рост ρ, а из первого:

$$\frac{dv}{d\tau} = f > 0.$$

Таким образом, при $h < 0$ скорость движения спутника в среднем уменьшается, а при $h > 0$ увеличивается. Искомый абсолютный минимум скорости следует искать в окрестности $h = 0$. Таким образом при $h < 0$ скорость движения спутника в среднем уменьшается, а при $h > 0$ увеличивается. При $h = 0$ корабль достигает параболической скорости и выходит на конечный участок траектории — плавную дугу, уже не закручивающуюся по спирали вокруг Земли. Далее корабль, набирая все большую энергию продолжает удаляться от Земли.

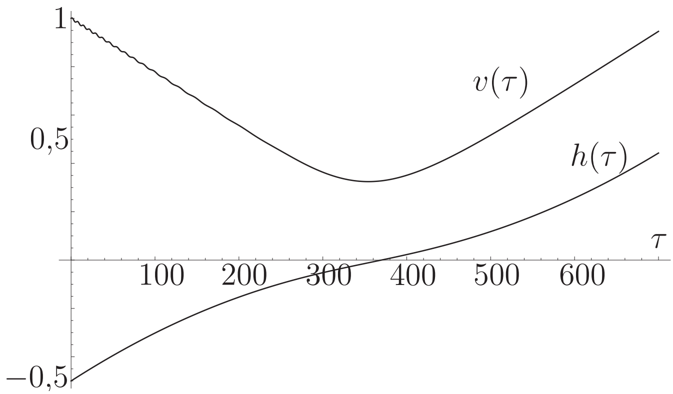

Рис. 8

На рисунке 8 приведены графики зависимости $v(\tau)$ и $h(\tau)$, полученные в результате численного интегрирования уравнений движения при начальных условиях $v(0) = 1$, $\rho(0) = 1$, $\cos\alpha = 0$, соответствующих круговой орбите.

На вычисленной траектории минимум безразмерной скорости $v_{\min}$ (соответствующий параболической скорости) и соответствующие безразмерное расстояние $\rho_{\min}$ и время $\tau_{\min}$ равны:

$$v_{\min} = 0{,}32458, \qquad \rho_{\min} = 15{,}653, \qquad \tau_{\min} = 354{,}3.$$

Переходя к размерным переменным, получим:

$$u_{\min} = 997{,}96 \text{ м/}c, \qquad r_{\min} = 659{,}7 \cdot 10^6 \text{ м},$$
$$t_{\min} = 4{,}857 \cdot 10^6 \text{ с} \approx 56 \text{ суток}.$$

Задача 6. Эффект домино

Обезразмерим задачу:

$$m = 1, \qquad g = 1, \qquad h = 1,$$

где m — масса костяшки.

Найдём связь между углами:

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \arcsin(l\cos\varphi_n - d).$$

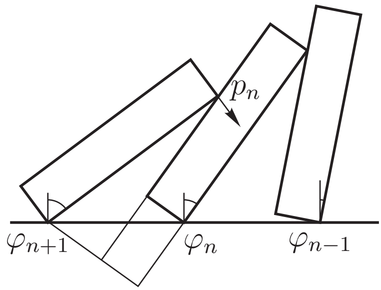

Рис. 9

Введём функцию Φ_n:

$$\varphi_n = \Phi_n(\varphi_0).$$

Дифференцируя, находим:

$$\omega_{n+1} = \omega_n \frac{\cos(\varphi_{n+1} - \varphi_n) - l\sin\varphi_n}{\cos(\varphi_{n+1} - \varphi_n)} = \omega_n \frac{b_n(\varphi_0)}{a_n(\varphi_0)},$$

так как функции a_n и b_n зависят в общем случае от угла поворота первой костяшки. Также введём для удобства:

$$\omega_n = \omega_0 \prod_{i=0}^{n-1} \frac{b_i(\varphi_0)}{a_i(\varphi_0)} = r_n(\varphi_0)\omega_0.$$

Кинетическая энергия:

$$T_n = \frac{I}{2}\omega_n^2 = \frac{I}{2}\omega_0^2 r_n^2(\varphi_0), \qquad \text{где} \qquad I = \frac{1+d^2}{3}.$$

Полная кинетическая энергия, как функция угла и угловой скорости первой костяшки:

$$T(\varphi_0, \omega_0) = \sum T_n = \frac{I\omega_0^2}{2} \sum_{n=0}^{\infty} r_n^2(\varphi_0) = \frac{I\omega_0^2}{2} J(\varphi_0).$$

Потенциальная энергия:

$$\Pi_n = \frac{d}{2}\sin\varphi_n + \frac{1}{2}\cos\varphi_n.$$

Рассмотрим изменение потенциальной энергии $U(\varphi) = \Pi(\varphi) - \Pi(0)$ между положениями, когда первая костяшка была вертикальной и её положением при угле φ:

$$U(\varphi) = \frac{d}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sin\Phi_n(\varphi) - \sin\Phi_n(0)\Big) + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\cos\Phi_n(\varphi) - \cos\Phi_n(0)\Big).$$

Запишем закон сохранения энергии для пролёта первой костяшки от вертикального положения сразу после удара ($\omega_0 = \Omega_0$, $\varphi_0 = 0$), до произвольного положения ($\omega_0 = \omega$, $\varphi_0 = \varphi$).

$$\frac{I\Omega_0^2}{2}J(0) = U(\varphi) + \frac{I\omega^2}{2}J(\varphi).$$

Выразив ω, найдём время между ударами, как интеграл по углу:

$$t = \int\limits_0^{\varphi_c}\frac{d\varphi}{\omega} = \int\limits_0^{\varphi_c}\sqrt{\frac{IJ(\varphi)}{I\Omega_0^2 J(0) - 2U(\varphi)}}d\varphi. \tag{5}$$

Таким образом, зная Ω_0 можно численно проинтегрировать это уравнение. Начальную скорость найдём из удара.

Пусть p_n — импульс, который передала $(n+1)$-я костяшка n-й, $\tilde{\Omega}$ — скорости до удара, Ω — скорости после удара. Запишем уравнения сохранения момента импульса для удара:

$$\begin{aligned}
I\Omega_0 \quad &= p_0 a_0(0),\\
I(\Omega_1 - \tilde{\Omega}_1) \quad &= p_1 a_1(0) - p_0 b_0(0),\\
I(\Omega_2 - \tilde{\Omega}_2) \quad &= p_2 a_2(0) - p_1 b_1(0),\\
&\dots\\
I(\Omega_n - \tilde{\Omega}_n) \quad &= p_n a_n(0) - p_{n-1} b_{n-1}(0),\\
&\dots
\end{aligned}$$

Домножим второе уравнение на $a_0(0)/b_0(0) = r_1(0)$, второе — на $r_2(0)$ и так далее. Также прибавим и отнимем в первом уравнении член $I\tilde{\Omega}_0 = I\tilde{\Omega}_1/r_1(0)$, после чего просуммируем все уравнения:

$$I\tilde{\Omega}_0 + I\Big(\Omega_0 + \Omega_1 r_1(0) + \ldots\Big) - I\left(\tilde{\Omega}_0 r_0(0) + \tilde{\Omega}_1 r_1(0) + \ldots\right) =$$
$$= \tilde{\Omega}_0 + \left(\Omega_0 r_0^2(0) + \Omega_0 r_1^2(0) + \ldots\right) - \left(\tilde{\Omega}_0 r_0^2(0) + \tilde{\Omega}_0 r_1^2(0) + \ldots\right) =$$
$$= \tilde{\Omega}_0 + \Omega_0 J(0) - \tilde{\Omega}_0 J(0) = 0,$$

$$\Omega_0 = \frac{J(0)-1}{J(0)}\tilde{\Omega}_0 = \frac{J(0)-1}{J(0)}\tilde{\Omega}_1, \qquad \text{так как } r_1(0) = 1.$$

Таким образом, мы нашли связь между скоростью $\tilde{\Omega}_1$ первой костяшки до удара и скоростью Ω_0 новой первой костяшки после удара. Запишем закон сохранения энергия за время пролёта костяшки до следующего соударения:

$$\frac{I\Omega_0^2}{2}J(0) + \Pi(0) = \frac{I\tilde{\Omega}_0^2}{2}J(\varphi_1) + \Pi(\varphi_\infty) = \frac{I\tilde{\Omega}_0^2}{2}\big(J(0)-1\big) + \Pi\left(\arccos\frac{d}{l}\right)$$

$$\Omega_0^2 = \frac{J(0)-1}{J(0)I}\left(1 - \frac{d}{l} - d\sqrt{1-\frac{d^2}{l^2}}\right).$$

Подставив значение Ω_0 в (5) и посчитав интеграл, получим конечную скорость распространения волны как $v = l/t$. Итоговый ответ нужно не забыть домножить на $\sqrt{gh}$:

$$v = 1{,}169 \text{ м/с}.$$

Стоит отметить, что ряды $J(\varphi)$ и $U(\varphi)$ сходятся очень быстро, для достижения требуемой точности достаточно брать первые 10 членов.

Задача 7. Пришла весна

1. Течение жидкости можно представить системой уравнений гидродинамики.

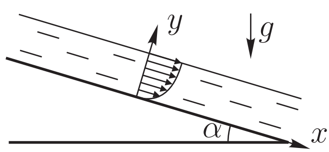

Рис. 10

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + (\nabla\cdot\rho\vec{v}) = 0,$$
$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \mu\Delta\vec{v}.$$

Так как жидкость несжимаема $\partial\rho/\partial t = 0$, а движение одномерно $\vec{v} = (v_x, 0, 0)^\intercal$, то из первого уравнения следует $\partial v_x/\partial x = 0$. Скорость меняется только вдоль оси y, так как течение стационарно. Компоненты градиента давления $\partial p/\partial x = -\rho g \sin\alpha\, \partial p/\partial y = -\rho g \cos\alpha$. Тогда для второго уравнения получаем:

$$g\sin\alpha + \mu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = 0.$$

Интегрируем дважды: $v_x(y) = -\frac{g\sin\alpha}{2\mu}y^2 + Ay + B$ и используем граничные условия: прилипание на дне $v_x|_{y=0} = 0$, и отсутствие трения о воздух на поверхности $(\partial v_x/\partial y)|_{y=h} = 0$, тогда скорость:

$$v_x(y) = \frac{g\sin\alpha}{2\mu}y(2h - y).$$

Таким образом, расход воды Q на одном участке:

$$Q = \rho b\int\limits_0^h v_x(y)dy = \frac{\rho g b}{3\mu}h^3\sin\alpha.$$

При этом средняя скорость $v_x = \frac{h^2 g\sin\alpha}{3\mu}$. В точках C и F перемешиваются приходящие потоки (обычно, на реках в таких местах запруды). И дальше выходит поток на последний участок перед плотиной:

$$h_{CG} = \sqrt[3]{\frac{2h_1^3\sin\alpha_{2L}}{\sin\alpha_{2L}}} = h_1\sqrt[3]{2}, \qquad \text{аналогично} \qquad h_{FG} = h_1\sqrt[3]{3/2}.$$

Таким образом, уровень воды на последнем участке $h_L = h_1\sqrt[3]{5/2}$. Получаем расход $Q = 2{,}381\cdot 10^5$ кг/с, а это больше пропускной способности плотины.

2. Изменение высоты в резервуаре от времени:

$$\rho S\frac{dh}{dt} = Q - q_0 e^{h^2/h_{\max}^2}.$$

Проинтегрируем это уравнение численно, и найдём время t, через которое высота в $h_{\max} = 40$ м будет достигнута:

$$t = 3227{,}7\text{ с} \approx 54\text{ мин}.$$