Финальный тур
Всероссийской студенческой олимпиады
по механике и математическому моделированию
(1 октября 2011 г.)

Задача 1. Удивительный маятник

1. Составьте уравнение движения математического маятника длины l в однородном поле тяжести g. В качестве координаты выберите угол отклонения от положения равновесия.
2. Обезразмерьте получившееся уравнение.

Задача 2. Мэр-велосипедист

Друзья подарили мэру города Новомеханска велосипед с квадратными колесами (длина стороны квадрата — $2a$). Определите, каким станет профиль велосипедных дорожек Новомеханска после соответствующих распоряжений мэра в дорожный департамент города. При движении велосипеда высота и ориентация седла должны оставаться неизменными. Ответ сопроводите качественным графиком профиля.

Рис. 1.

Задача 3. Самурай и цилиндр

На абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости лежит цилиндр радиуса $r = 10$ см. В начальный момент самурай перерубает цилиндр пополам по вертикальной плоскости проходящей через его ось.

1. Запишите уравнения движения половинок цилиндра.
2. Определите наибольшую угловую скорость, которую приобретёт половинка цилиндра за время движения.
3. Определите через какое время половинки цилиндра снова сойдутся.

4. Определите значение угла φ между плоскостью разреза и горизонтом в следующие моменты времени: $t = 0{,}1,\ 0{,}2, \ldots 1{,}0$ с.

Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Приведите ответы с относительной погрешностью не более 0,1 %.

Задача 4. Пренеприятнейшее известие

Губернатор уездного города N был застигнут пренеприятнейшим известием во время мытья рук. Кусок мыла (однородный куб с ребром a) выскользнул из рук губернатора и упал в раковину полусферической формы. Мыло движется так, что четыре вершины куба скользят по поверхности раковины без отрыва, а трение пренебрежимо мало.

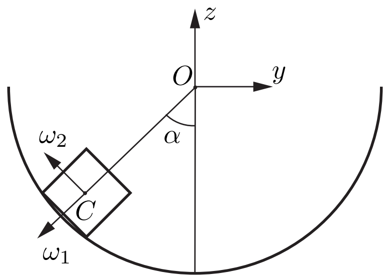


Рис. 2.

Начальная угловая скорость куска мыла представляется в виде суммы $\vec{\omega}_1$ и $\vec{\omega}_2$, как показано на рисунке.

Сторона куба $a = \sqrt{2}/16$ м, $\omega_1 = 2\omega_2 = 40/3$ рад/с, $g = 10$ м/c^2, $R = OC = 5a/2$. В начальный момент $\alpha = 45°$.

1. Сколько степеней свободы имеет упавшее мыло?
2. Найдите координаты $(x,\ y,\ z)$ центра масс мыла через $t = 1, 2, \ldots 10$ с.
3. Найдите угол, на который повернётся мыло относительно оси OC, в те же моменты времени.

Приведите численные ответы с относительной погрешностью не более 0,1 %.

Задача 5. Торможение спутника

Спутник выведен на круговую орбиту Земли в разреженные слои атмосферы. Вследствие торможения атмосферой спутник начинает снижаться и двигаться по спиралевидной кривой, близкой к круговой. Сила сопротивления воздуха рассчитывается по формуле:

$$\vec{F} = -\rho(h)S\,v\vec{v}$$

где S — площадь поперечного сечения спутника; $\rho(h)$ — плотность атмосферы как функция высоты, которая аппроксимируется формулой $\rho(h) = \rho_0 \exp(-h/h_0)$, где $\rho_0 = 0{,}001750$ г/см^3 — условная плотность атмосферы у поверхности Земли, а $h_0 = 7{,}7$ км.

Определите отношение $(v_0 - v_T)/v_0$, где v_0 и v_T — начальная скорость и скорость спутника через один виток соответственно. Приведите ответ с относительной погрешностью не более 0,1 %. Радиус Земли равен $r_E = 6400$ км. Спутник считайте шаром радиуса 30 см со средней плотностью $\rho_s = 7{,}8$ г/см^3. Начальная высота орбиты равна:

1. $H_1 = 150$ км;
2. $H_2 = 130$ км.

Задача 6. Волки целы, овцы сыты

Рассмотрите модель межвидовой конкуренции:

$$\dot{p} = \alpha(p)p - \beta pq,$$
$$\dot{q} = \gamma pq - \mu q,$$

где $\alpha(p) = \gamma(2p - \varepsilon\, p^2)$ — коэффициент, характеризующий «мальтузианский» рост жертвы, $\beta = 0{,}37$, $\gamma = 0{,}06$, $\varepsilon = 0{,}14$, а $0{,}3 < \mu < 0{,}6$ — параметр, выражающий скорость вымирания хищника.

1. Рассчитайте динамику популяций хищников и жертв в течение $\tau_0 = 450$ при $\mu_1 = 0{,}5$. Начальные условия $p_0 = 9$, $q_0 = 2$. Нарисуйте качественный график динамики хищников q. Определите η отношение среднего количества жертв к среднему количеству хищников на участке $\tau = (300, 450)$. Приведите ответ с относительной погрешностью не более 0,1 %
2. Выполните задание предыдущего пункта при $\mu_2 = 0{,}4$.
3. Выполните задание предыдущего пункта с начальными условиями $p_0 = 8$, $q_0 = 1$.
4. Нарисуйте качественные графики динамики системы на фазовой плоскости p, q для предыдущих заданий.
5. Опишите возможные варианты поведения системы через продолжительное время при различных значениях μ.

6. Как зависит поведение системы через продолжительное время от начальных условий.
7. Определите граничные значения μ, при которых наблюдается смена качественного поведения системы через продолжительное время.

Задача 7. «Одномерная конвекция»

Мензурка радиуса $r \ll 1$ заполнена до уровня $H = 1$ жидкостью, плотность ρ которой не зависит от давления и практически не зависит от температуры T. В начальный момент времени зависимость температуры жидкости от высоты z имеет вид

$$T_0(z) = \frac{3z}{2}.$$

Температура окружающей среды поддерживается равной

$$T_e(z) = 1 + \frac{1}{2}\sin\frac{5\pi z}{2}.$$

Известно, что жидкость имеет удельную теплоёмкость c и обменивается с окружающей средой теплом только через стенки мензурки, коэффициент теплоотдачи которых $\alpha = \rho c r/2$.

В результате теплообмена с окружающей средой в жидкости происходит *конвекция*, то есть тёплые слои жидкости расширяются и всплывают вверх под действием силы Архимеда; холодные слои, соответственно, погружаются вниз. Считая, что во время таких передвижений температуры слоёв не изменяются, постройте таблицу значений температуры жидкости $T = T(z,t)$ в точках $z = 0,\ 0{,}1,\ 0{,}2, \ldots 1$ в момент времени $t = 0{,}7$ с относительной погрешностью не более $0{,}1\,\%$.

Значения всех величин указаны в системе СИ.

Примечание. Поток тепла в единицу времени через единицу площади стенки мензурки равен произведению коэффициента теплоотдачи α на разность температур жидкости и окружающей среды.

Решения

Задача 1. Удивительный маятник

1. Для ответа на первый вопрос запишем закон сохранения энергии и продифференцируем его:

$$ml^2\frac{\dot{\varphi}^2}{2} - mgl\cos\varphi = \mathrm{const}, \qquad \ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\sin\varphi.$$

2. Чтобы обезразмерить получившееся уравнение, сделаем замену $t \to \tau\sqrt{l/g}$, тогда

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} = -\sin\varphi.$$

Задача 2. Мэр-велосипедист

Введём оси x и y как показано на рисунке 3, и пусть изначально колесо располагалось параллельно осям. Тогда середина стороны M будет точкой касания колеса с дорогой и совпадать с точкой A. Пусть колесо проехало некоторое расстояние и повернулось на угол φ. Поскольку проскальзывание отсутствует, длина дуги кривой $AP = MP = s$, где P — новая точка касания. Если x, y — координаты точки P, то высота центра колеса O найдётся как:

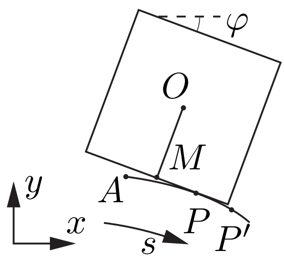


Рис. 3.

$$h = y + s\sin\varphi + a\cos\varphi.$$

Найдём смещение dh при небольшом повороте колеса.

$$dh = dy + ds\sin\varphi + s\,d\varphi\cos\varphi - a\,d\varphi\sin\varphi.$$

Приращение $dy = -|PP'|\sin\varphi = -ds\sin\varphi$. Поскольку по условию задачи $dh = 0$, то получим

$$dh = s\,d\varphi\cos\varphi - a\,d\varphi\sin\varphi = 0, \qquad s = a\,\mathrm{tg}\,\varphi.$$

Так как $\operatorname{tg}\varphi = -y'(x)$, где $y(x)$ — уравнение профиля дороги, можно записать:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{s}{a}, \qquad dx^2 + dy^2 = ds^2,$$

Откуда, выбирая знаки согласно рисунку, найдём:

$$dx = \frac{ds}{\sqrt{(s/a)^2+1}}, \qquad dy = -\frac{ds}{\sqrt{(a/s)^2+1}}.$$

Проинтегрировав полученные выражения придём к выражениям

$$x = x_0 + a\operatorname{arsh}\frac{s}{a}, \qquad y = y_0 - \sqrt{s^2+a^2} = y_0 - a\operatorname{ch}\frac{x-x_0}{a}.$$

Значения x_0 и y_0 зависят от выбора начала координат. Можно их выбрать так, что начало координат будет располагаться в точке касания колеса углом. График такой функции

$$y = a\left(\sqrt{2} - \operatorname{ch}\frac{x-\Delta x}{a}\right), \qquad \Delta x = a\operatorname{arsh}1 = a\ln(1+\sqrt{2})$$

при $a = 1$ представлен на рисунке 4. Перепад высот на дороге составляет $a(\sqrt{2}-1)$, элементы дороги длиной $2\Delta x$ повторяются.

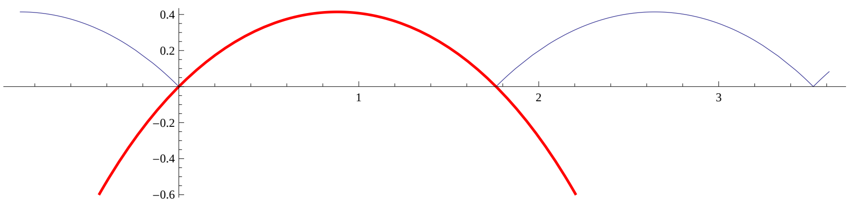


Рис. 4.

Задача 3. Самурай и цилиндр

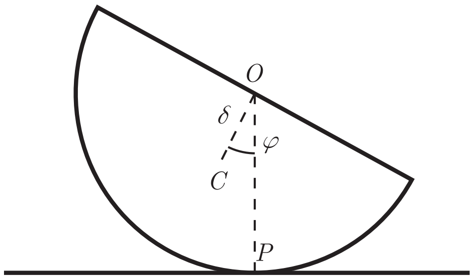


Рис. 5.

1. Для составления уравнений движения полуцилиндра достаточно использовать закон сохранения энергии.

Для нахождения потенциальной энергии потребуется расстояние δ от центра масс C до линии сечения (рис. 5).

$$\delta = \frac{1}{\pi r^2/2}\iint_D y dx dy = \frac{2}{\pi r^2}\int\limits_0^\pi \int\limits_0^r r^2 \sin\varphi dr d\varphi = \frac{4}{3\pi} r.$$

Потенциальная энергия фигуры равна

$$\Pi = -mg\delta\cos\varphi,$$

где m — масса.

Для нахождения кинетической энергии системы удобно воспользоваться наличием мгновенного центра скоростей P.

$$T = \frac{1}{2} J_P \dot{\varphi}^2$$

Определим J_P, используя теорему Гюйгенса–Штейнера:

$$J_P = J_C + mPC^2.$$

Момент инерции J_C удобно связать с моментом инерции J_O относительно середины сечения (рис. 5), который нетрудно вычислить:

$$J_O = \frac{1}{2} m r^2, \qquad J_O = J_C + m\delta^2 \qquad \Rightarrow \qquad J_C = J_O - m\delta^2.$$

Подстановка этого выражения и формулы

$$PC^2 = \delta^2 \sin^2\varphi + (r - \delta\cos\varphi)^2$$

в выражение для J_P приводит к следующему результату:

$$J_P = \frac{3}{2}mr^2 - 2mr\delta\cos\varphi.$$

Таким образом, закон сохранения энергии примет вид

$$\left(\frac{3}{2}mr^2 - 2mr\delta\cos\varphi\right)\dot{\varphi}^2 = 2mg\delta\cos\varphi, \tag{1}$$

откуда можно выразить $\dot{\varphi}$:

$$\dot{\varphi} = 2\sqrt{\frac{g\delta\cos\varphi}{3r^2 - 4r\delta\cos\varphi}} = 4\sqrt{\frac{\cos\varphi}{9\pi - 16\cos\varphi}\cdot\frac{g}{r}}, \tag{2}$$

а можно, продифференцировав (1), получить классическое уравнение движения:

$$\ddot{\varphi} = -\left(\frac{9\pi}{8} - 2\cos\varphi\right)^{-1}\left(\frac{g}{r} + \dot{\varphi}^2\right)\sin\varphi. \tag{3}$$

2. Максимальная угловая скорость, очевидно, соответствует минимуму потенциальной энергии, который достигается при $\varphi = 0$. Подставляя эту величину в выражение для угловой скорости $\dot{\varphi}$, получим:

$$\dot{\varphi}_{\max} = 4\sqrt{\frac{1}{9\pi - 16}\cdot\frac{g}{r}} = 11{,}4\ \text{с}^{-1}.$$

3. Для того, чтобы найти период получившихся колебаний, можно либо проинтегрировать дифференциальное уравнение (2), либо записать:

$$\frac{dt}{d\varphi} = \sqrt{\frac{3r^2 - 4r\delta\cos\varphi}{4g\delta\cos\varphi}} = \sqrt{\frac{9\pi - 16\cos\varphi}{16\cos\varphi}\cdot\frac{r}{g}}. \tag{4}$$

Проинтегрировав (4) от начального положения до положения равновесия, получим значение четверти периода. Таким образом, период:

$$\tau = 4\sqrt{\frac{r}{g}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{9\pi}{16\cos\varphi} - 1}\,d\varphi = 1{,}19\ \text{с}.$$

4. Интегрирование (3) даёт:

t	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$\lvert\varphi\rvert$	1,42	0,936	0,0316	0,975	1,44

t	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\lvert\varphi\rvert$	1,57	1,41	0,896	0,0946	1,01

Значения φ приведены в таблице по абсолютной величине. График $\varphi(t)$ приведён на рис. 6.

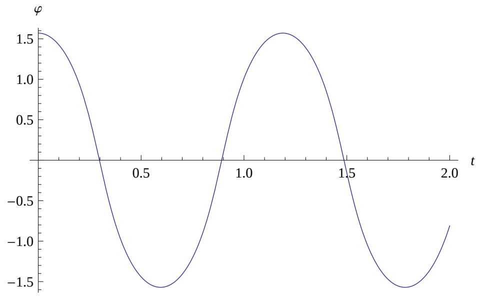


Рис. 6.

Задача 4. Пренеприятнейшее известие

Движущееся в раковине мыло фактически представляет собой твёрдое тело с неподвижной точкой O, у которого, как известно, три степени свободы. В качестве обобщённых координат можно выбрать углы Эйлера φ, ψ, θ. Тогда координаты центра масс куба могут быть представлены следующим образом:

$$x = R\sin\theta\cos\psi,$$
$$y = R\sin\theta\sin\psi,$$
$$z = R\cos\theta.$$

Для угловых скоростей ω_1 и ω_2 в начальный момент времени справедливо:

$$\omega_1 = \dot{\varphi} - \frac{\dot{\psi}}{\sqrt{2}}, \qquad \omega_2 = \frac{\dot{\psi}}{\sqrt{2}}.$$

Выразив $\dot\varphi$ и $\dot\psi$ через известные данные, получим:

$$\dot\psi = \omega_2\sqrt{2}, \qquad \dot\varphi = \omega_1 + \omega_2.$$

Угол нутации между угловыми скоростями $\vec{\dot\varphi}$ и $\vec{\dot\psi}$ равен $\theta = 3\pi/4$.

Момент инерции куба относительно оси OC:

$$C = \frac{ma^2}{6}.$$

Момент инерции относительно оси Ox для начального положения по теореме Гюйгенса–Штейнера

$$A = \frac{ma^2}{6} + mR^2.$$

Момент внешних сил относительно точки O создаётся силой тяжести $M_O = mgR/\sqrt{2}$.

Подставим полученные данные в основную формулу гироскопии:

$$M_O = \vec{\dot\psi} \times \vec{\dot\varphi}\left(C + (C-A)\frac{\dot\psi}{\dot\varphi}\cos\theta\right).$$

В проекции на ось x получим

$$\frac{mgR}{\sqrt{2}} = \omega_2(\omega_1+\omega_2)\left(\frac{ma^2}{6} + mR^2\frac{\omega_2}{\omega_1+\omega_2}\right).$$

Разделив получившееся равенство на ma^2 и подставив численные значения, получим верное равенство.

Таким образом, начальные условия движения куска мыла удовлетворяют основному уравнению гироскопии. Следовательно, движение будет регулярной прецессией. Во все время движения остаются неизменными величины $\theta = 3\pi/4$, а также $\dot\psi = 20\sqrt{2}/3$ рад/с и $\dot\varphi = 20$ рад/с.

Пусть в начальный момент $\varphi = 0$, $\psi = 0$, тогда координаты центра масс меняются по закону:

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} R \cos \dot{\psi} t,$$
$$y = \frac{1}{\sqrt{2}} R \sin \dot{\psi} t,$$
$$z = \frac{1}{\sqrt{2}} R = \mathrm{const}\,.$$

Поворот вокруг собственной оси происходит с постоянной по модулю угловой скоростью $\dot{\varphi}$. Угол поворота

$$\varphi(t) = \dot{\varphi} t$$

.

Приведём численные ответы в виде таблицы:

t	x	y	z	φ
1	0,000518	0,156	−0,156	20
2	−0,00104	−0,156	−0,156	40
3	0,00155	0,156	−0,156	60
4	−0,00207	−0,156	−0,156	80
5	0,00259	0,156	−0,156	100
6	−0,00311	−0,156	−0,156	120
7	0,00362	0,156	−0,156	140
8	−0,00414	−0,156	−0,156	160
9	0,00466	0,156	−0,156	180
10	−0,00517	−0,156	−0,156	200

Задача 5. Торможение спутника

Введем обозначения: M, R, ρ_s, v — масса, радиус, плотность и скорость спутника соответственно, m — масса Земли. Масса и поперечная площадь спутника равны:

$$M = \frac{4}{3} \rho_s \pi R^3,$$
$$S = \pi R^2.$$

Запишем уравнения движения спутника в полярной системе координат $(r,\,\varphi)$ с началом отсчёта в центре Земли.

$$\ddot{r} = r\dot{\varphi}^2 - \frac{Gm}{r^2} + f\dot{r},$$
$$r\ddot{\varphi} = -2\dot{r}\dot{\varphi} + fr\dot{\varphi}.$$

Мы ввели обозначение

$$f = -\rho(h)v\frac{S}{M},$$

где скорость спутника равна $v = \sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2}$ Обезразмерим систему. Для этого отнормируем расстояния на r_E, а время на $\omega_0 = Gm/r_0^3$

$$t \to t' = t\omega_0,$$
$$r \to r' = \frac{r}{r_E}.$$

В новых переменных уравнения движения имеют вид

$$\ddot{r} = r\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{r^2} + f\dot{r},$$
$$\ddot{\varphi} = -\frac{2\dot{r}\dot{\varphi}}{r} + f\dot{\varphi}.$$

Теперь уже

$$f = -\frac{3}{4}\frac{\rho(h)}{\rho_s}\frac{r_E}{R}v.$$

а скорость спутника v вычисляется по прежней формуле. Начальные условия для нашей системы таковы:

$$r(0) = 1 + \frac{H_0}{r_E},$$
$$\varphi(0) = 0,$$
$$\dot{r}(0) = 0,$$
$$\dot{\varphi}(0) = r(0)^{-3/2}.$$

Численно решив систему уравнений, находим момент времени T, когда спутник завершит первый оборот: $\varphi(T) = 2\pi$, и искомое отношение скоростей. В первом случае численный расчет дает $T = 6{,}50456$ и

$$\frac{v(0) - v(T)}{v(0)} = -8{,}557 \cdot 10^{-5}.$$

При падении спутника его скорость возрастает.

Во втором случае спутник упадет на Землю уже на первом витке (точнее, еще раньше сгорит в плотных слоях атмосферы), поскольку в момент времени $t_1 = 6{,}41$:

$$r(t_1) = 1{,}000,$$
$$\varphi(t_1) = 6{,}062 < 2\pi.$$

Задача 6. Волки целы, овцы сыты

Поскольку первые 4 пункта задачи сводятся к численному интегрированию предложенной системы, приведём здесь полученные графики (рис. 7).

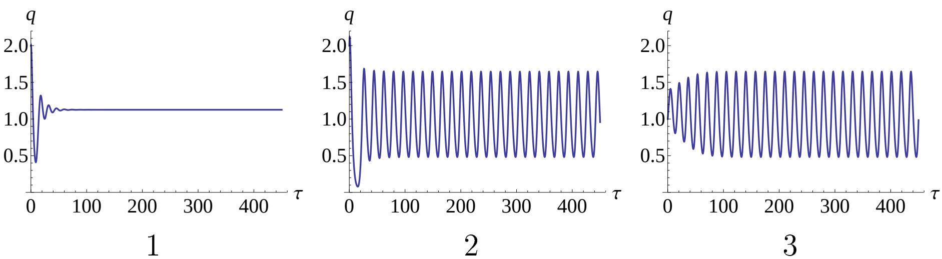


Рис. 7.

Выражение для η:

$$\eta = \frac{\int\limits_{300}^{450} p(\tau)d\tau}{\int\limits_{300}^{450} q(\tau)d\tau}, \qquad \eta_1 = 7{,}40, \qquad \eta_2 = 6{,}63, \qquad \eta_3 = 6{,}80.$$

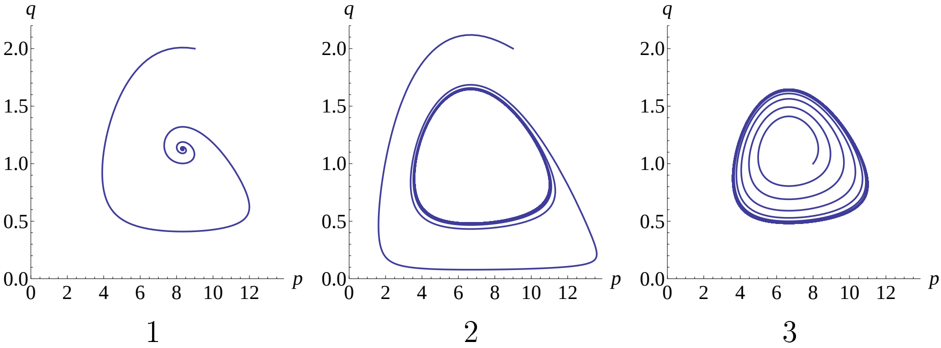


Рис. 8.

Графики полученных траекторий движения представлены на рисунке **??**.

По фазовым траекториям можно описать эволюцию системы. Видно, что при $\mu = \mu_1$ количество хищников и жертв стремятся к некоторым фиксированным значениям, а при $\mu = \mu_2$ система меняется по закону, асимптотически близкому к периодическому (стремится к предельному циклу).

Прежде чем перейти к детальному анализу системы избавимся от большинства коэффициентов перенормировкой. Положим:

$$p \to x/\varepsilon, \qquad q \to y\beta\gamma/\varepsilon, \qquad \tau \to t\varepsilon/\gamma, \qquad \mu \to m\gamma/\varepsilon.$$

Тогда уравнения движения приобретут вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (2x - x^2)x - xy, \\ \dot{y} &= xy - my, \end{aligned}$$

где параметр $0{,}7 < m < 1{,}4$.

Найдём особые точки системы ($\dot{x} = \dot{y} = 0$). Такими точками будут

$$O = (0, 0), \qquad A = (2, 0), \qquad Q = (m, 2m - m^2).$$

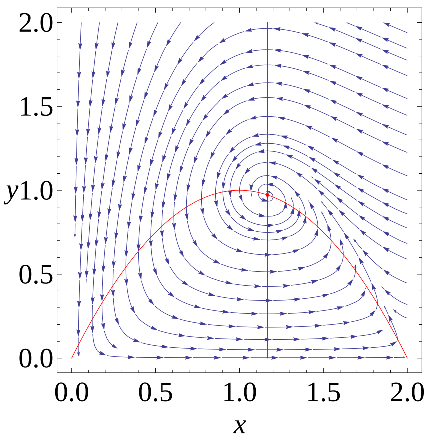
Для того, чтобы проанализировать поведение системы запишем матрицу Якоби системы:

$$J = \begin{pmatrix} 4x - 3x^2 - y & -x \\ y & -m + x \end{pmatrix}$$

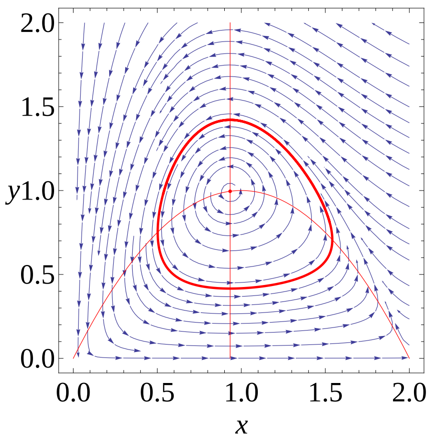
Для точки O собственными значениями матрицы J являются $\lambda = 0, \ -m$. Заметим, что вдоль оси x вблизи точки O $\dot{x} = 2x^2 - x^3 > 0$, таким образом точка O — седло (так как в разных направлениях есть как притягивающие, так и отталкивающие векторы).

Для точки A $\lambda = -4, \ 2 - m$. Поскольку при заданных значениях параметра собственные значения имеют разные знаки, то заключаем, что и эта точка является седлом.

Собственные значения матрицы J для точки Q в заданном диапазоне параметра m являются комплексными $\lambda = m - m^2 \pm im\sqrt{1 + m - m^2}$. Откуда следует, что при $m > 1$ ($\mu > \gamma/\varepsilon = 0{,}429$) точка Q является устойчивым (притягивающим) фокусом, причём, используя результаты численных вычислений можно показать, что при этом не существует предельных циклов. Таким образом, при любых начальных условиях система через некоторое время окажется в точке Q (пункт 1).



$m > 1$



$m < 1$

Рис. 9.

При $m < 1$ точка Q является неустойчивым (отталкивающим) фокусом. Проинтегрировав систему при нескольких значениях параметра, можно прийти к выводу, что для этого случая существует предельный цикл, к которому стремится система либо снаружи (как в пункте 2), либо изнутри (как в пункте 3).

Из тех же соображений можно показать, что при $m = 1$ точка Q является притягивающим фокусом.

Результаты анализа продемонстрированы на фазовых диаграммах (рис. **??**).

Таким образом, при $\mu \geqslant \gamma/\varepsilon = 0{,}429$ система совершает затухающие колебания вокруг устойчивого фокуса, а при $\mu < \gamma/\varepsilon$ стремится к предельному циклу, причём от начальных условий может зависеть только фаза предельных популяционных волн, но никак не амплитуда или форма.

Задача 7. «Одномерная конвекция»

Построим модель, описывающую зависимость $T = T(z,t)$ температуры жидкости от времени t и высоты z.

Тепловая энергия слоя жидкости высотой h, где $r \ll h \ll H$, находящегося на уровне z, равна $Q \approx cT(z,t)\pi r^2 h\rho$. Если конвекция отсутствует, то Q может измениться только за счёт теплообмена с окружающей средой:

$$\partial Q/\partial t = \alpha(T_e - T)2\pi r h.$$

(Вертикальными тепловыми потоками в жидкости здесь можно пренебречь, так как $r \ll h$.) Раскрыв скобки и учитывая соотношение $2\alpha = \rho c r$ мы получим уравнение

$$\partial T/\partial t = T_e - T. \tag{5}$$

Для учёта конвекции разобъём весь столб жидкости на n ячеек высотой H/n, где $n \in \mathbb{N}$ таково, что $r \ll H/n \ll H$. Тогда дискретный аналог уравнения (**??**) имеет вид

$$T_k^{s+1} = T_k^s + (T_e(z_k) - T_k^s)\tau,$$

где $\tau > 0$ — шаг по времени, $s \in \mathbb{N}$ — номер шага по времени, $z_k = kH/n$ и T_k^s — температура k-той ячейки при $t = s\tau$.

Если в некоторый момент времени окажется, что $T_k^s < T_l^s$ при $l < k$, ячейка №l начнёт всплывать под действием силы Архимеда, а ячейка №k будет погружаться под действием силы тяжести. Этот процесс будет продолжаться до тех пор, пока числа

$\{T_k^s\}_{k=1,2,\ldots n}$ не станут упорядочены по возрастанию. По условию конвекция происходит значительно быстрее, чем теплообмен, поэтому длительность данного процесса можно считать малой по сравнению с τ. В связи с этим модель конвекции рассматриваемой жидкости принимает вид

$$T_k^{s+1/2} = T_k^s + (T_e(z_k) - T_k^s)\,\tau,$$
$$T_k^{s+1} = \left(T_k^{s+1/2}\right)^\sharp,$$

где $(\cdot)^\sharp$ означает сортировку по возрастанию (по индексу k).

Применив численные расчёты при $n = 100$ и $\tau = 0{,}001$, получим зависимость температуры от высоты при $t = 0{,}7$, график которой представлен на рисунке **??**. Требуемые значения представлены в таблице.

z	0.	0.1	0.2	0.3	0.4	
$T(z)$	0.504	0.756	0.801	0.801	0.801	
z	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$T(z)$	0.802	0.802	0.847	1.099	1.352	1.5

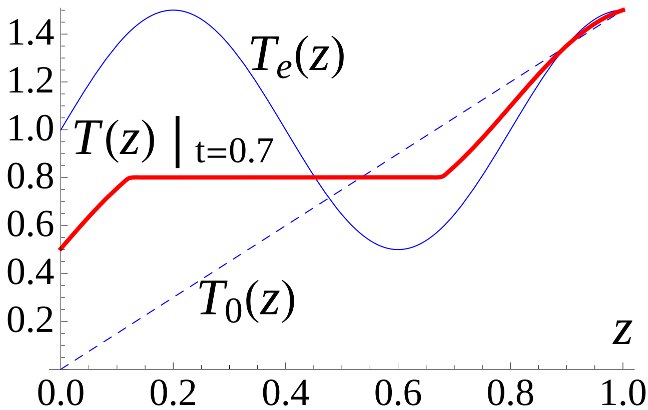


Рис. 10.