Государственное образовательное учереждение
высшего профессионального образования
«Московский физико-технический институт
(государственный университет)»

Всероссийская студенческая олимпиада по механике и математическому моделированию

Гасников А. В., Глухова Е. В., Гусев Н. А., Ерофеев И. С.,
Киселёв А. М., Притыкин Д. А., Федичев О. Б

Под редакцией Ерофеева И. С.

Москва, 2010 г.

Предисловие

Подготовка и проведение студенческих олимпиад является системообразующим элементом организации творческой учебно-познавательной деятельности в высшей школе. Участие студентов в олимпиадном движении способствует развитию их творческого потенциала, а также более системному и глубокому усвоению профессиональных знаний. Развитие олимпиадного движения помогает выявлять и поддерживать талантливую молодежь, привлекать и закреплять ее в сфере науки, образования и высоких технологий. Именно на решение подобных задач направлена организация на базе МФТИ Всероссийской студенческой олимпиады по механике и математическому моделированию.

ВСО МММ проводится с целью совершенствования качества подготовки специалистов в области классической и прикладной механики и математического моделирования, а также для повышения интереса студентов к избранной профессии, выявления одарённой молодёжи и формирования кадрового потенциала для научно-исследовательской и производственно-предпринимательской деятельности.

Все вопросы организации и проведения ВСО МММ находятся в компетенции руководства МФТИ и учебно-методического объединения вузов РФ по образованию в области прикладных математики и физики (УМО).

В соответствии с положением о ВСО МММ в олимпиаде могут принимать участие студенты, обучающиеся по образовательным программам разных направлений, специальностей и специализаций всех курсов обучения и всех вузов России независимо от их ведомственной подчинённости и организационно-правовой формы. В ней могут также принимать участие граждане других государств — студенты российских вузов, вузов СНГ и других стран.

Олимпиада проводится в двух номинациях для двух групп вузов: личный и командный конкурс. Первая номинация (личный конкурс) проводится по принципу личного первенства. Вторая номинация (командный конкурс) проводится по принципу командного первенства по наименьшей сумме мест, набранных тремя участниками данного вуза в личном конкурсе. В первую группу входят вузы, среди участников команд которых имеются победители национальных олимпиад школьников по математике, физике и информатике. Во вторую группу входят остальные вузы.

Первый отборочный тур ВСО МММ (заочный Интернет тур) проводится на базе МФТИ. Второй финальный тур ВСО МММ проводится очно в МФТИ. К участию во втором финальном туре ВСО МММ допускаются студенты, прошедшие регистрацию:

— либо согласно заявке вуза, представленной в оргкомитет олимпиады до 16 ноября 2010 г.;

— либо по итогам первого отборочного тура ВСО МММ, проводимого МФТИ.

Финальный тур рассчитан на пять часов и включает в себя восемь заданий разной сложности (от самых простых задач до актуальных проблем механики, являющихся предметом современных исследований). Предметная область заданий второго финального тура — классическая, небесная и прикладная механика. В рамках общепринятых для этих областей знаний подходов участникам предлагается выбрать наиболее подходящую модель для описания той или иной поставленной проблемы, провести анализ этой модели и получить аналитическое или численное решение. Поскольку задачи второго финального тура ВСО МММ допускают численное решение, участникам разрешается пользоваться собственными ноутбуками с любыми математическими пакетами, а также литературой и справочными материалами, подготовленными самостоятельно.

Несмотря на довольно широкий спектр проблем, относящихся к современной механике, подходы к этим проблемам опираются на ряд основных понятий, законов, принципов и методов общих для всех областей механики. Эта общность подхода к моделированию в механике позволяет рассчитывать на возможность решения предлагаемых задач в рамках умений и знаний, обеспеченных образовательными программами технических вузов. С другой стороны, многообразие исследуемых в механике процессов и явлений дает возможность формулировать задачи, вызывающие у участников творческий интерес.

Для формирования банка задач для проведения ВСО МММ предполагается привлекать не только преподавателей МФТИ, но и представителей вузов УМО в области прикладных математики и физики.

Подведение итогов в личном конкурсе проводится суммированием баллов.

При равенстве набранных баллов у участников, показавших три наиболее высоких результата, более высокое место присуждается участнику, имеющему:
— наибольшее число полных баллов по задачам;
— более высокие баллы по отдельным задачам.

При равенстве баллов у остальных участников конкурса им присуждаются одинаковые места.

Победители и призёры награждаются дипломами, денежными премиями и памятными подарками.

Финальный тур
Всероссийской студенческой олимпиады
по механике и математическому моделированию

21 ноября 2010 г.

Задача 1. Нелинейный осциллятор

Однородный диск массы m катится без проскальзывания по горизонтальной направляющей, взаимодействуя с пружиной, жёсткость которой k, а длина в недеформированном состоянии l_0. Один конец пружины прикреплён к центру диска, а другой зафиксирован в точке A под направляющей, так, что, когда пружина вертикальна, её длина равна l ($l > l_0$). Считая, что в описанной системе нелинейность является слабой, представьте её уравнения движения в форме осциллятора с нелинейностью степени n:

$$\ddot{q} + \omega^2(q + \mu q^n) = 0.$$

Определите константы ω^2, μ и n.

Задача 2. Альпинисткий случай

К телу массой $m = 1$ кг прикреплена легкая нить, второй конец которой перекинут через невесомый блок, установленный в вершине неподвижной призмы с углом $\beta = 80°$. В начальный момент тело удерживают в таком положении, что нить горизонтальна и натянута, расстояние от тела до блока равно $L = 1$ м. Тело отпускают без начальной скорости, а нить тянут с постоянной силой F. Найти такое значение силы F, при котором произойдёт удар тела о призму, причём с минимально возможным ударным импульсом.

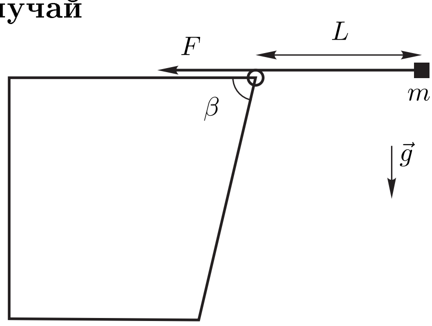


Рис. 1

Размеры блока и трение в нём считаются пренебрежимо малыми. Запас нити сколь угодно велик. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Численный ответ следует привести в виде десятичной дроби, чтобы погрешность не превышала 10^{-3}.

Задача 3. Двумерный кёрлинг

Тонкий однородный диск радиуса R лежит на шероховатой горизонтальной плоскости. В начальный момент времени диску сообщается угловая скорость $\omega_0 \neq 0$, направленная вертикально, а центру масс диска сообщается горизонтальная скорость $v_0 \neq 0$. Предполагается, что распределение нормальных напряжений в пятне контакта равномерное и трение подчиняется закону Кулона. Найти безразмерное отношение скорости центра масс диска к его угловой скорости $v/(\omega R)$ в момент остановки диска.

Указание. Рекомендуется воспользоваться аппроксимациями Паде второго порядка модулей главного вектора и главного момента сил трения, соответственно:

$$F(k) = mgf\frac{k^2+k}{k^2+k+1}, \qquad M(k) = 2mgfR\frac{k+1}{8k^2+3k+3}.$$

Здесь $k = v/(\omega R)$, $g = 10$ м/с^2 — ускорение свободного падения, $f = 0{,}2$ — коэффициент трения. В качестве тестовых начальных условий рассмотреть пары $(v_0,\, \omega_0 R)$:

$$(u,\, u),\, (u,\, 2u),\, (2u,\, u),\, (2u,\, 2u), \qquad \text{где} \qquad u = 1 \text{ м}/c.$$

Численные ответы следует привести в виде десятичной дроби, чтобы абсолютная погрешность не превышала 10^{-2}.

Задача 4. Волчок

Динамически симметричный волчок может двигаться по абсолютно гладкой горизонтальной плоскости, касаясь её своим острием. Пусть $m = 1$ кг — масса волчка, $l = 0{,}25$ м — расстояние от центра масс до острия, $C = 1$ кг $\cdot$ м^2 — момент инерции волчка относительно оси динамической симметрии, $A = 0{,}5$ кг $\cdot$ м^2 — момент инерции относительно любой оси, проходящей через центр масс и перпендикулярной оси симметрии. В начальный момент ось симметрии составляет с вертикалью угол $\theta_0 = \pi/8$. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2.

1. Подберите начальную угловую скорость волчка так, чтобы при движении волчка производная по времени угла прецессии $\dot{\psi}(t)$, была неотрицательной, но имела бы счётное число нулей. Достаточно указать одно решение.

2. Проведите численный эксперимент и определите начальные условия, для которых $\dot{\psi}(t)$ при движении волчка, соответствующем изменению угла ψ от 0 до 2π, имеет ровно десять нулей. Достаточно привести один ответ. Ответ следует привести в виде десятичной дроби, чтобы абсолютная погрешность не превышала 10^{-2}.

Задача 5. Спутник двойной звезды

Две звезды α и β массы M каждая, расстояние между которыми $2R$, вращаются друг относительно друга по круговым орбитам, образуя двойную звезду. Рассматривается движение спутника массы $m \ll M$ в системе отсчёта, связанной со звёздами α и β, в которой удалённые небесные тела вращаются против часовой стрелки, с системой единиц такой, что $M = 1$, $R = 1$ и гравитационная постоянная $G = 1$.

1. Напишите уравнения движения спутника в декартовых координатах. Звёзды расположены в точках $(x, y) = (\pm 1, 0)$.

2. Назовём «восьмёркой» *плоскую замкнутую самопересекающуюся траекторию спутника, пересекающую отрезок между звёздами более одного раза за период*. Пусть в начальный момент времени спутник находится посередине между звёздами, а его скорость направлена по оси x. Найдите величину скорости v_0, при которой его траектория является «восьмёркой», а период не превышает 9π. Достаточно указать одно решение.

Численные ответы следует привести к десятичной дроби так, чтобы погрешность не превышала 10^{-3}.

Задача 6. О падающих карандашах

Под каким углом к вертикали φ_0 надо поставить карандаш на стол, чтобы он падал $t = 1$ год. Длина карандаша $l = 15$ см. Карандаш считать однородным стержнем с пренебрежимо малой толщиной. Проскальзывание между карандашом и столом отстутствует. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2.

Ответ следует представить в радианах в следующем виде: мантисса (вещественное число от 1,00 до 9,99) с двумя знаками после запятой и экспонента (целое число).

Например, $\varphi_0 = \underbrace{1{,}59}_{\text{мантисса}} \cdot 10^{\overbrace{-6}^{\text{экспонента}}}$.

Задача 7. Время разбрасывать камни

Пусть M обозначает массу камней, необходимых для перекрытия реки, если в единицу времени в реку засыпается масса m, характерный размер фиксированного профиля реки l, скорость течения v, плотность воды ρ, ускорение свободного падения g.

1. Покажите, что всего есть три независимые безразмерные комбинации:
$$\frac{m}{M}\sqrt{\frac{l}{g}}, \quad \frac{gl}{v^2} \quad \text{и} \quad \frac{m}{v\rho l^2}.$$

2. Покажите, что найдётся такая функция $\psi(*, *)$, что
$$M = m\sqrt{\frac{l}{g}}\ \psi\left(\frac{gl}{v^2}, \frac{m}{v\rho l^2}\right).$$

Задача 8. Вспомнить всё

Рассмотрим систему алгебро–дифференциальных уравнений, возникающую при моделировании течений вязкой жидкости при малых числах Рейнольдса:

$$\begin{cases} B\mathbf{x} = 0, \\ \mathbf{x}' + B^\tau \mathbf{y} = A\mathbf{x}, \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \end{cases} \tag{1}$$

где $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ и $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t)$ — столбцы, $\mathbf{x}' \equiv d\mathbf{x}/dt$, $t \in [0,\, 1]$,

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 & -3 & 0 \\ -5 & 2 & 3 & -3 & -5 \\ -5 & -5 & -2 & -3 & -2 \\ -3 & -4 & -4 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & -3 & 0 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -3 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & -5 & 3 \\ -2 & 5 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

B^τ — транспонированная матрица B.

1. Докажите, что условие $B\mathbf{x}_0 = 0$ является необходимым и достаточным для разрешимости задачи (1).

2. Решите задачу (1) численно при $\mathbf{x}_0 = (-7,\, -4,\, 10,\, 3,\, 0)^\tau$. Постройте таблицу значений величины $r(t) = \|\mathbf{x}(t)\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ при $t = 0,\, 0{,}1,\, 0{,}2,\, 0{,}3, \ldots 1$. Абсолютная погрешность ответов не должна превышать 10^{-3}.

Указание. При решении задачи можно использовать теорему Фредгольма и метод Грама–Шмидта.

Решения

Задача 1. Нелинейный осциллятор

В качестве координаты выберем смещение центра масс диска x из положения равновесия. Кинетическая и потенциальная энергии диска равны соответственно:

$$T = \frac{3}{4}m\dot{x}^2, \qquad \Pi = \frac{k}{2}\left(\sqrt{x^2+l^2} - l_0\right)^2$$

Тогда обобщённая сила

$$Q_x = -kx\left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{l^2+x^2}}\right) = -kx\left(1 - \frac{l_0}{l}\left(1+\frac{x^2}{l^2}\right)^{-1/2}\right) \approx$$

$$\approx -kx\left(1 - \frac{l_0}{l}\left(1 - \frac{x^2}{2l^2}\right)\right) = -c_1x - c_2x^3,$$

где $c_1 = k\dfrac{l-l_0}{l}$, а $c_2 = k\dfrac{l_0}{2l^3}$.

Окончательно, уравнение движения системы записывается в виде:

$$\ddot{q} + \omega^2(q + \mu q^n) = 0,$$

где $\omega^2 = \dfrac{2c_1}{3m} = 2k\dfrac{l-l_0}{3ml}, \quad \mu = \dfrac{c_2}{c_1} = \dfrac{l_0}{2l^2(l-l_0)}, \quad n = 3.$

Ответ: $\omega^2 = \dfrac{2c_1}{3ml} = 2k\dfrac{l-l_0}{3m}$, $\mu = \dfrac{c_2}{c_1} = \dfrac{l_0}{2l^2(l-l_0)}$, $n = 3$.

Задача 2. Альпинисткий случай

Обозначим $f = F/m$. Лагранжиан системы в полярных координатах (r, φ).

$$\mathcal{L} = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{mr^2\dot{\varphi}^2}{2} + m(g\sin\varphi - f)r.$$

Уравнения движения системы:

$$\ddot{r} = g\sin\varphi - f + r\dot{\varphi}^2, \tag{2}$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{g}{r}\cos\varphi - \frac{2\dot{r}\dot{\varphi}}{r}. \tag{3}$$

Начальные условия:

$$r_0 = L, \qquad \dot{r}_0 = \varphi_0 = \dot{\varphi}_0 = 0.$$

Далее ищем минимальную силу, при которой произойдёт удар, то есть будет достигнут угол $\varphi(t^*) = \pi - \beta$. При этом и будет минимален ударный импульс.

Численный расчёт даёт значение силы $F = 4{,}450$ Н.

Ответ: $F = 4{,}450$ Н.

Задача 3. Двумерный кёрлинг

Система уравнений движения диска

$$\dot{v}(t) = -\frac{F(k)}{m} = -\mathcal{F}(k), \qquad \dot{u}(t) = -\frac{M(k)R}{J} = -\mathcal{M}(k),$$

где $J = mR^2/2$ – момент инерции диска, а $u = \omega R$, имеет первый интеграл:

$$\ln u(t) - \int \frac{\mathcal{M}(k)dk}{\mathcal{F}(k) - k\mathcal{M}(k)} = \mathrm{const}\,. \tag{4}$$

В момент остановки диска $u(t) \to 0$ и $\ln u(t)$ становится бесконечным. В нашем случае константа в правой части (4) конечна, поэтому бесконечность $\ln u(t)$ может компенсироваться только бесконечностью интеграла в левой части (4), причём одного знака. Это означает, что знаменатель подынтегрального выражения стремится к нулю в момент остановки

$$\mathcal{F}(k) - k\mathcal{M}(k) = 0.$$

Подстановка в последнее уравнение $\mathcal{F}(k)$ и $\mathcal{M}(k)$ из указания приводит к уравнению:

$$k(k+1)(4k^2 - k - 1) = 0,$$

у которого только один строго положительный корень $k = 0{,}64$ является ответом на поставленный вопрос в задаче.

Ответ: $v/(\omega R) = 0{,}64$.

Историческая справка. Впервые эта задача была решена в 1981 году (*Ишлинский А.Ю., Соколов Б.Н., Черноусько Ф.Л.* О движении плоских тел при наличии сухого трения // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 4. С. 17-28.) с несколько завышенным результатом $v/(\omega R) = 0{,}71$. В дальнейшем решение многократно проверялось и уточнялось многими авторами, в том числе и авторами данного текста задачи с использованием программных пакетов. Современный результат решения сформулированной задачи выглядит $v/(\omega R) = 0{,}653$.

Задача 4. Волчок

Ориентация волчка относительно неподвижной системы координат задаётся углами Эйлера ψ, θ, φ. Проекции вектора угловой скорости на главные центральные оси инерции обозначены p, q и r.

Так как внешние силы не создают момента относительно оси симметрии, проекция угловой скорости волчка на эту ось постоянна:

$$r = r_0 = \mathrm{const}\,. \tag{5}$$

Так как внешние силы направлены вертикально, сохраняется также и проекция момента импульса на вертикаль:

$$K_z = A\sin^2\theta\dot{\psi} + Cr_0\cos\theta = \mathrm{const}\,. \tag{6}$$

По закону сохранения энергии:

$$T + \Pi = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}A(p^2 + q^2) + \frac{1}{2}Cr^2 + mgl\cos\theta = \mathrm{const}\,.$$

Здесь v_G — скорость центра масс:

$$v_G = \frac{d}{dt}(l\cos\theta) = -l\dot{\theta}\sin\theta.$$

Таким образом, интеграл энергии представляется в виде:

$$(A + ml^2\sin^2\theta)\dot{\theta}^2 + A\sin^2\theta\dot{\psi}^2 + 2mgl\cos\theta = \mathrm{const}\,. \tag{7}$$

Пусть в начальный момент выполняется:

$$\dot{\psi} = 0, \qquad \dot{\theta} = 0, \qquad \dot{\varphi} = r_0 \tag{8}$$

Тогда интегралы (6) и (7) можно переписать в виде:

$$A\sin^2\theta\dot{\psi} = Cr_0(\cos\theta_0 - \cos\theta)$$
$$(A + ml^2\sin^2\theta)\dot{\theta}^2 + A\sin^2\theta\dot{\psi}^2 = 2mgl(\cos\theta_0 - \cos\theta)$$

Откуда:

$$\dot{\psi} = \frac{Cr_0(\cos\theta_0 - \cos\theta)}{A\sin^2\theta}, \tag{9}$$
$$A\sin^2\theta(A + ml^2\sin^2\theta)\dot{\theta}^2 = f(\theta), \tag{10}$$

где $f(\theta) = (\cos\theta_0 - \cos\theta)\big(2Amgl\sin^2\theta - C^2r_0^2(\cos\theta_0 - \cos\theta)\big)$.

Так как $f(\theta) \geqslant 0$, $\theta \geqslant \theta_0$ значение угла θ меняется в пределах от θ_0 до θ_1, где θ_1 — ближайший к θ_0 корень $f(\theta)$. Каждый раз, когда $\theta(t) = \theta_0$ $\dot{\psi}$ обращается в ноль. Таким образом, ответом на первый вопрос задачи является любая комбинация начальных условий подобная (8) при $\dot{\varphi}_0 \neq 0$.

Для численного определения законов движения волчка $\theta(t)$ и $\psi(t)$ последовательно используются уравнения (10) и (9).

Ответом на второй вопрос задачи являются, например, следующие начальные условия:

$$\psi_0 = \varphi_0 = 0, \qquad \theta_0 = \pi/8, \qquad \dot{\psi}_0 = \dot{\theta}_0 = 0, \qquad \dot{\varphi}_0 = 4{,}2 \text{ рад/с}.$$

Ответ: 1. $\dot{\psi} = 0$, $\dot{\theta} = 0$, $\dot{\varphi} = r_0$,   2. $\dot{\varphi}_0 = 4{,}2$ рад/с .

Задача 5. Спутник двойной звезды

1. Сила притяжения между звёздами $F = GM^2/(2R)^2 = 1/4$. Эта сила обеспечивает вращение звёзд по окружности радиуса R, следовательно:

$$\omega^2 R = \frac{F}{M}, \qquad \text{откуда} \qquad \omega = \frac{1}{2}.$$

Вращение звёзд происходит по часовой стрелке, следовательно, вектор $\vec{\omega}$ образует с осями x и y левую тройку. Период обращения $T = 4\pi$.

Пусть координаты спутника $\vec{r} = (x,\, y)$, тогда определим вектора:

$$\vec{r}_1 = (x-1,\, y)\,, \qquad \vec{r}_2 = (x+1,\, y)\,.$$

Второй закон Ньютона для спутника:

$$m\ddot{\vec{r}} = -GMm\frac{\vec{r}_1}{r_1^3} - GMm\frac{\vec{r}_2}{r_2^3} + m\,\omega^2\vec{r} - 2m\,\vec{\omega}\times\vec{v}.$$

Запишем теперь это уравнение в проекции на оси:

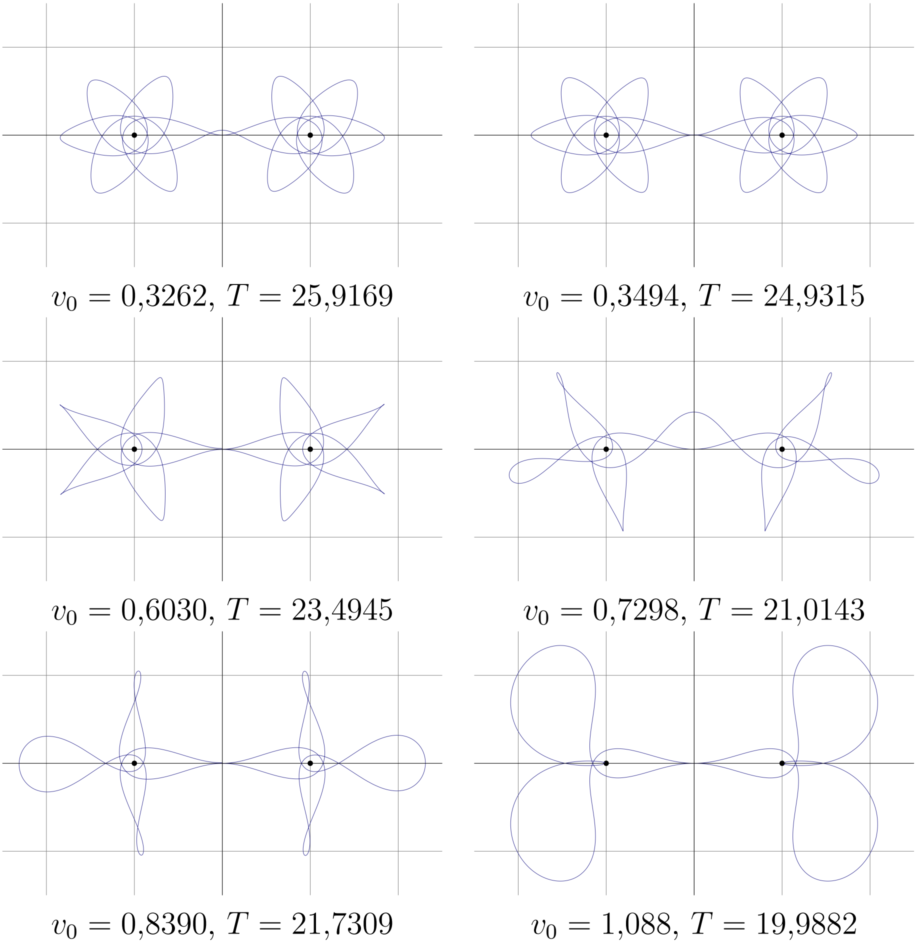
$$\begin{cases} \ddot{x} = -\dfrac{x-1}{\left((x-1)^2+y^2\right)^{3/2}} - \dfrac{x+1}{\left((x+1)^2+y^2\right)^{3/2}} + \dfrac{x}{4} - \dot{y}, \\ \ddot{y} = -\dfrac{y}{\left((x-1)^2+y^2\right)^{3/2}} - \dfrac{y}{\left((x+1)^2+y^2\right)^{3/2}} + \dfrac{y}{4} + \dot{x}. \end{cases}$$

2. Формализуем понятие замкнутости траектории, сузив определение «восьмёрки»: будем считать траекторию замкнутой, если при втором пересечении спутником оси y, координата спутника $y^* = 0$ и $v_y^* = 0$. Другими словами, спутник вернётся в начальное состояние. Теперь численно интегрируя полученные дифференциальные уравнения с начальными условиями

$$x_0 = y_0 = \dot{y}_0 = 0, \qquad \dot{x}_0 = v_0$$

будем получать различные y^*. Можно подобрать v_0, при котором y^* будет достаточно мал, и использовать его в качестве начального значения при поиске нуля функции $y^*(v_0)$. Некоторые значения v_0, которые обнуляют y^*, будут обнулять и v_y^*.

Приведём некоторое количество искомых траекторий с указанием значения начальной скорости и периода. Отметим, что часть этих траекторий симметрична не только относительно оси y, но и относительно оси x.



$v_0 = 0{,}3262$, $T = 25{,}9169$ $v_0 = 0{,}3494$, $T = 24{,}9315$

$v_0 = 0{,}6030$, $T = 23{,}4945$ $v_0 = 0{,}7298$, $T = 21{,}0143$

$v_0 = 0{,}8390$, $T = 21{,}7309$ $v_0 = 1{,}088$, $T = 19{,}9882$

Рис. 2: Искомые «восьмёрки» при различных v_0.

Ответ: Например, $v_0 = 0{,}6030$.

Задача 6. О падающих карандашах

Пусть масса карандаша m. Запишем потенциальную и кинетическую энергию карандаша при его отклонении на угол φ от вертикали.

$$T = \frac{ml^2}{3}\frac{\dot\varphi^2}{2}, \qquad \Pi = \frac{mgl}{2}\cos\varphi, \qquad T + \Pi = E = \mathrm{const}\,,$$

где E — полная энергия системы.

Выразив $\dot\varphi$ получим:

$$\dot\varphi = \frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{6T}{ml^2}}, \qquad \text{откуда} \qquad dt = d\varphi\sqrt{\frac{ml^2}{6T}}.$$

Для кинетической энергии можно записать

$$T = E - \Pi = \Pi_0 - \Pi = \frac{mgl}{2}(\cos\varphi_0 - \cos\varphi).$$

Окончательно, найдём:

$$t = \int\limits_0^t dt = \int\limits_{\varphi_0}^{\pi/2}\sqrt{\frac{ml^2}{3mgl(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)}}d\varphi = \sqrt{\frac{l}{3g}}\int\limits_{\varphi_0}^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi_0 - \cos\varphi}}.$$

Таким образом, мы избавились от размерностей и перешли к вычислению интеграла. В этом интеграле целесообразно сделать замену $\theta = (\pi - \varphi)/2$. Таким образом,

$$t = \sqrt{\frac{l}{3g}}\int\limits_{\pi/4}^{(\pi-\varphi_0)/2}\frac{2d\theta}{\sqrt{\cos\varphi_0 + 1 - 2\sin^2\theta}} =$$

$$= \sqrt{\frac{l}{3g}}\frac{2}{\sqrt{\cos\varphi_0 + 1}}\int\limits_{\pi/4}^{(\pi-\varphi_0)/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1 - m\sin^2\theta}},$$

где $m = 2/(\cos\varphi_0 + 1) = \cos^{-2}(\varphi_0/2)$.

Окончательно получим,

$$\tau = \frac{1}{\cos(\varphi_0/2)}\left[F\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi_0}{2},\, m\right) - F\left(\frac{\pi}{4},\, m\right)\right],$$

где $F(\varphi,\, m) = \int\limits_0^{\varphi} \dfrac{d\theta}{\sqrt{1 - m\sin^2\theta}}$ — неполный эллиптический интеграл первого рода, а $\tau = t\sqrt{\dfrac{3g}{2l}} = 365\cdot 24\cdot 60\cdot 60\cdot \sqrt{\dfrac{3\cdot 10}{2\cdot 0{,}15}} = 315\,360\,000$.

Интуитивно понятно, что, чтобы карандаш падал целый год, начальный угол должен быть предельно мал. Следовательно, $\varphi_0 \to 0$, а $m \to 1$. Значение $\cos(\varphi_0/2) \to 1$, а $F(\pi/4,\, m) \to \mathrm{const} \approx 0{,}88 \ll \tau$. Таким образом, приходим к следующему выражению:

$$\tau = F\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi_0}{2},\, m\right) = \mathrm{Re}\ K(m),$$

где $K(m)$ — полный эллиптический интеграл первого рода.

А для функции $K(1+\varepsilon)$ можно написать разложение по ε вблизи нуля:

$$K(1+\varepsilon) = -i\pi\left\lfloor -\frac{\mathrm{Arg}\ \varepsilon}{2\pi}\right\rfloor\left(1 - \frac{\varepsilon}{4} + \frac{9}{64}\varepsilon^2 + \ldots\right) + \\ + \frac{1}{2}\big(-i\pi + 4\ln 2 - \ln\varepsilon\big) + \frac{\varepsilon}{8}\big(2 + i\pi - 4\ln 2 + \ln\varepsilon\big) + \ldots$$

Когда ε действительно, вещественный член нулевого порядка равен:

$$\mathrm{Re}\ K(1+\varepsilon) \approx 2\ln 2 - \frac{\ln\varepsilon}{2} \approx -\frac{\ln\varepsilon}{2}.$$

Поскольку $m = 1 + \varepsilon = \cos^{-2}(\varphi_0/2) \approx 1 + (\varphi_0/2)^2$, $\varepsilon = \varphi_0^2/4$, откуда находим

$$\tau = \mathrm{Re}\ K(m) \approx -\ln\varphi_0.$$

Окончательно $\varphi_0 = e^{-\tau}$. Если вспомнить все поправки, получим:

$$\varphi_0 = \exp\left(-\tau - F\left(\frac{\pi}{4}{,}1\right) + 3\ln 2\right) = \\ = 8\exp\left(-F\left(\frac{\pi}{4}{,}1\right)\right)\cdot 10^{-315\,360\,000/\ln 10} = 3{,}313\cdot 10^{-136\,959\,107{,}813} = \\ = 3{,}313\cdot 10^{0{,}187}\cdot 10^{-136\,959\,108} = 5{,}10\cdot 10^{-136\,959\,108}.$$

После чего не сложно убедиться, что поправка первой степени в разложении τ равна по порядку $\varphi_0^2 \ln \varphi_0 \ll 1$ и не может никак повлиять на значащие цифры ответа.

Ответ: $\varphi = 5{,}10 \cdot 10^{-136\,959\,108}$.

Ответ $e^{-\tau}$ отличается от истинного примерно в 3 раза. Правильными ответами участников считались ответы, отличающиеся от истинного не более, чем в 10 раз. Если ответы отличались более чем в 10 раз но не более чем в 10^{1000} раз, то количество баллов за ответ уменьшалось вдвое.

Примечание. Приведённые выше формулы и свойства эллиптических интегралов не обязательно знать при решении задачи. Современные математические пакеты символьных вычислений позволяют получить все эти выражения. Также задачу можно решить проще, хоть и менее строго: можно увидеть логарифмическую зависимость $t(\varphi_0)$ по нескольким точкам, которые можно посчитать численно, и экстраполировать эту зависимость на заданное t. Но следует отметить, что в данном способе, чтобы достичь необходимой точности, выбирать φ_0 действительно малыми (меньше 10^{-5}) и проводить интегрирование с очень высокой точностью (нужно, чтобы абсолютная ошибка интегрирования составляла не более, чем 10^{-10}).

Задача 7. Время разбрасывать камни

Покажем, что существуют всего три независимые безразмерные комбинации параметров задачи:

$$\frac{m}{M}\sqrt{\frac{l}{g}}, \quad \frac{gl}{v^2} \quad \text{и} \quad \frac{m}{v\rho l^2}.$$

Пусть величине с размерностью $T^p L^q M^r$ соответствует вектор размерности $(p,\, q,\, r)$. Произведение величин будет соответствовать сложению векторов размерности. Определим вектора размерности параметров задачи:

$$\begin{aligned} M &\to (0,\, 0,\, 1), \quad & m &\to (-1,\, 0,\, 1),\\ l &\to (0,\, 1,\, 0), \quad & v &\to (-1,\, 1,\, 0),\\ \rho &\to (0,\, -3,\, 1), \quad & g &\to (-2,\, 1,\, 0). \end{aligned}$$

Нужно найти все такие решения $\vec{\alpha}$, чтобы

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{\alpha} = 0.$$

Несложно проверить, что фундаментальной матрицей этой системы будет

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Отсюда и следует базисность трёх найденных безразмерных комбинаций.

Параметры системы не являются независимыми, так как M не произвольная масса, а масса, удовлетворяющая некоторому соотношению. Следовательно, параметры связаны:

$$\Psi\left(\frac{m}{M}\sqrt{\frac{l}{g}}, \frac{gl}{v^2}, \frac{m}{v\rho l^2}\right) = 0. \tag{11}$$

Это составляет содержание П-теоремы Бакингема, основной теоремы размерного анализа.

Из смысла задачи следует, что решение M определено и единственно. А значит, его можно выразить из (11):

$$M = m\sqrt{\frac{l}{g}}\psi\left(\frac{gl}{v^2}, \frac{m}{v\rho l^2}\right),$$

что и требовалось доказать.

Задача 8. Вспомнить всё

Обозначим $n = 5$, $m = 3$. Если $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ — решение (1), то при $t \in [0, T]$ $B\mathbf{x}(t) = 0$. Поэтому условие

$$B\mathbf{x}_0 = 0$$

является *необходимым* для существования решения. Ниже мы покажем, что оно является и *достаточным*. Для удобства будем отождествлять линейные отображения и их матрицы в стандартном базисе.

По условию $\operatorname{rg} B \leqslant m < n$, так что $\ker B \neq \{0\}$, т.е. множество значений $\mathbf{x}_0$, для которых выполнено необходимое условие разрешимости (1), состоит не только из нулевого вектора.

Введём в $\mathbb{R}^n$ (и в $\mathbb{R}^m$) скалярное произведение стандартным образом. Тогда линейное отображение B^τ будет сопряжённым к линейному отображению B.

По теореме Фредгольма $\mathbb{R}^n = \ker B \oplus \operatorname{Im} B^\tau$, причём подпространства $\ker B$ и $\operatorname{Im} B^\tau$ ортогональны. Обозначим через P ортогональный проектор на подпространство $\operatorname{Im} B^\tau$. Пусть E — единичная матрица $n \times n$.

Нетрудно проверить, что $\{\mathbf{x},\, \mathbf{y}\}$ является решением (1) тогда и только тогда, когда

$$\begin{gathered}
\mathbf{x}' = (E - P)A\mathbf{x}, \\
\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \\
B^\tau \mathbf{y} = PA\mathbf{x}.
\end{gathered}$$

Мы получили задачу Коши для $\mathbf{x}$, которая, как известно, имеет единственное решение $\mathbf{x}(t)$. По определению P правая часть последнего уравнения есть элемент $\operatorname{Im} B^\tau$, откуда вытекает существование решения этого уравнения $\mathbf{y}(t)$. Итак, условие $B\mathbf{x}_0 = 0$ является *достаточным* для разрешимости задачи (1).

Чтобы решить задачу (1) численно, нужно найти матрицу P. Можно проверить, что $P = GG^\tau$, где столбцы матрицы G получаются из столбцов матрицы B^τ ортогонализацией (и нормировкой) по методу Грама–Шмидта.

При $\mathbf{x}_0 = (-7,\, -4,\, 10,\, 3,\, 0)^\tau$ имеем $B\mathbf{x}_0 = 0$, так что решение задачи (1) существует.

Ответ:

t	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4
$\lVert\mathbf{x}(t)\rVert_2$	13,1909	10,7311	8,84513	7,35106	6,13947

	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
	5,14184	4,31267	3,61981	3,03913	2,55174	2,14238

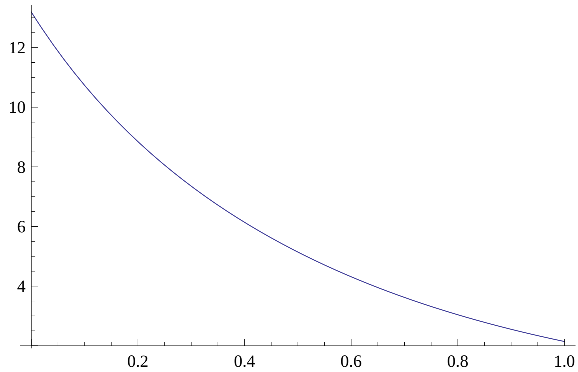


Рис. 3: График зависимости $r(t) = \|\mathbf{x}(t)\|_2$ от t.

Важно заметить, что для выполнения задания *достаточно найти только* функцию $\mathbf{x}(t)$. Для экономии времени, функцию $\mathbf{y}(t)$ можно не искать (см. приведённое выше решение).

Тем не менее, функцию $\mathbf{y}(t)$ найти также возможно. Отметим, что если $\operatorname{rg} B < m$, то $\ker B^\tau \neq \{0\}$. Поэтому если (1) имеет решение $\{\mathbf{x},\mathbf{y}\}$, то $\{\mathbf{x},\mathbf{y}+\mathbf{y}_0\}$, где $\mathbf{y}_0(t) \in \ker B^\tau$, $t \in [0, T]$, также будет решением (1). Итак, при $\operatorname{rg} B < m$ решение (1), если оно существует, не является единственным. Поэтому для нахождения $\mathbf{y}(t)$ в общем случае сначала нужно провести факторизацию. По теореме Фредгольма

$$\mathbb{R}^m = \ker B^\tau \oplus \operatorname{Im} B.$$

Тогда, если установить дополнительное требование $\mathbf{y}(t) \in \operatorname{Im} B$ при $t \in [0, T]$, то функция $\mathbf{y}$ будет определена однозначно.

С помощью метода Грама–Шмидта представим B в виде $B = QR$, где Q — матрица $m \times s$, столбцы которой образуют ОНБ в $\operatorname{Im} B$, R — верхняя треугольная матрица $s \times n$, $\operatorname{rg} R = s$.

$\mathbf{y}(t) \in \operatorname{Im} B$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{y} = Q\mathbf{u}$, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^s$, $t \in [0,T]$. Подставляя данное выражение для $\mathbf{y}$ в уравнение для

$\mathbf{y}$, получим:
$$R^\tau Q^\tau Q\mathbf{u} = PA\mathbf{x},$$
$$R^\tau \mathbf{u} = PA\mathbf{x},$$
$$RR^\tau \mathbf{u} = RPA\mathbf{x}.$$

Последняя система линейных уравнений имеет единственное решение, т.к. RR^τ — невырожденная (т.к. $\operatorname{rg} R = s$) квадратная матрица $s \times s$, т.е.
$$\mathbf{y} = Q(RR^\tau)^{-1}RPA.$$

(Для P можно использовать полученное выше представление $P = GG^\tau$.)

В заключение заметим, что система, подобная (1), возникает при решении методом Галёркина начально–краевой задачи для уравнений Стокса, описывающих движение вязкой несжимаемой жидкости при малых числах Рейнольдса (так называемые "ползущие течения"):

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad ((x,y,z,t) \in \Omega \times (0,T))$$
$$\mathbf{u}_t + \nabla p = \Delta \mathbf{u}, \quad ((x,y,z,t) \in \Omega \times (0,T))$$
$$\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0,\ \mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0.$$

(Здесь $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x,y,z,t)$ — поле скорости жидкости, $p = p(x,y,z,t)$ — поле давления, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область, $T > 0$.)