МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Н.И. Лобов, Д.В. Любимов

Общая теория относительности

Учебно-методическое пособие

Пермь 2012

УДК 532.783
ББК 22.313
Л68

Лобов Н.И.
Л68 Общая теория относительности: учеб.-метод. пособие / Н.И.Лобов, Д.В.Любимов; Перм. гос. нац. иссл. ун-т. – 2 е изд., стереотип. – Пермь, 2012. – 127 с.: ил.

ISBN 978-5-7944-1887-3

В пособии излагаются основы релятивистской теории гравитационного поля – общей теории относительности. Приводятся основные сведения о тензорной алгебре и тензорном анализе в пространствах переменной кривизны. Рассмотрены эффекты, наблюдаемые как в слабом гравитационном поле, так и в сильных полях. Подробно обсуждается решение Шварцшильда и стандартная космологическая модель. Приводятся примеры и упражнения. Учебно-методическое пособие предназначено для студентов старших курсов и аспирантов, специализирующихся по теоретической физике.

УДК 532.783
ББК 22.313

Печатается по постановлению редакционно-издательского совета Пермского государственного национального исследовательского университета

Рецензенты:
зав.каф. теоретической физики и компьютерного моделирования Перм. гос. пед. ун-та проф. ***Р.В.Бирих***; проф. каф. теоретической механики Перм. гос. техн. ун-та, к.ф.-м.н. ***Р.Н.Рудаков***

Данное пособие является победителем конкурса, проведенного Пермским государственным университетом в ходе реализации инновационной образовательной программы «Формирование информационно-коммуникационной компетентности выпускников классического университета в соответствии с потребностями информационного общества» в рамках приоритетного национального проекта «Образование»

ISBN 978-5-7944-1887-3

Содержание

Глава 1. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Теория тяготения А.Эйнштейна (1915 г.) является результатом последовательного применения принципов релятивизма к анализу гравитационного взаимодействия. Поэтому ее часто называют общей теорией относительности (ОТО), что представляется несколько некорректным. Все закономерности специальной теории относительности (СТО), ее предпосылки и выводы получили блестящее подтверждение в многочисленных экспериментах. В настоящее время нет никаких оснований для сомнений в правильности СТО.

Как известно, гравитационное взаимодействие является самым слабым из известных фундаментальных взаимодействий. Гравитационное поле даже вблизи поверхности Солнца является очень слабым. Это существенно ограничивает возможности экспериментальной проверки основ ОТО. Существует множество эффектов, предсказываемых релятивистской теорией тяготения. К настоящему времени надежно проверены такие эффекты, как прецессия орбиты Меркурия, увлечение инерциальных систем отсчета, гравитационное красное смещение, замедление хода часов. Необходимо отметить, что подобные предсказания делаются и альтернативными теориями, которые рассматривают гравитацию в плоском пространстве-времени. Подавляющее большинство физиков не сомневается в справедливости общей теории относительности, которая является одной из самых стройных и красивых физических теорий (академик Я.Б.Зельдович говорил, что в науке вопросы голосованием не решаются, но всегда полезно знать мнение большинства). С этой точки зрения принципиально важно экспериментальное подтверждение выводов теории о закономерностях процессов в сильных гравитационных полях.

Черные дыры являются, пожалуй, одним из самых экзотических образований, существование которых предсказывается теорией тяготения А.Эйнштейна. К концу XX в. список кандидатов в черные дыры содержал уже около сотни объектов (см. обзор И.Д.Новикова, В.П.Фролова [1]). И хотя, по общему признанию, черные дыры должны существовать, применительно к этим объектам по-прежнему относятся, как к кандидатам.

Вероятно, наиболее существенной (за последнее время) проверкой общей теории относительности является исследование двойного пульсара PSP 1916+16. Оно показало, что потеря энергии двойной системы нейтронных звезд за счет гравитационного излучения полностью согласуется с ОТО [2].

Основы релятивистской теории гравитации были сформулированы более 90 лет назад. За это время опубликовано много хороших книг, в которых рассматривается ОТО и ее приложения. Прекрасным учебником является, по-прежнему, «Теория поля» Л.Д.Ландау и Е.М.Лифшица [3]. Монографии [4, 5] основоположников современной релятивистской астрофизики Я.Б.Зельдовича и И.Д.Новикова посвящены астрофизическим приложениям ОТО и космологии.

Перед тем как перейти к изложению основ теории поля А.Эйнштейна, рассмотрим основные факты и положения специальной теории относительности.

§ 1. Интервал. Метрический тензор

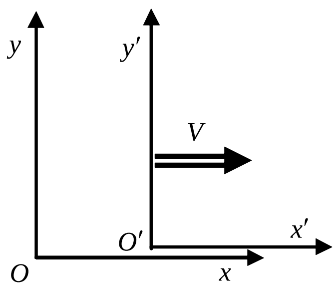

Рис. 1. Две инерциальные системы отсчета

Рассмотрим две системы отсчета: O и O' (рис. 1). В начальный момент времени их одноименные оси совпадают. Система O неподвижна, система O' движется относительно O в положительном направлении оси x с постоянной скоростью V.

В нерелятивистской механике координаты точки в движущейся системе отсчета выражаются через координаты в неподвижной системе следующим образом:

$$x' = x - Vt\,;\; y' = y\,;\;\; z' = z\,;\; t' = t\,. \qquad (2.1)$$

Выражения (2.1) называются преобразованиями Галилея.

В специальной теории относительности при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой инерциальной системе пространственные координаты и время изменяются в соответствии с преобразованиями Лоренца:

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}; \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \qquad (2.2)$$

Важнейшее отличие релятивистской механики от нерелятивистской заключается в том, что пространственные и временные координаты материальной точки преобразуются совместно. В пределе малых скоростей $V/c \ll 1$ преобразования Лоренца переходят в преобразования Галилея. Преобразования Лоренца оставляют неизменной комбинацию

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \qquad (2.3)$$

Величина s называется интервалом.

Инвариантность интервала означает, что пространство и время объединяются в четырехмерный мир – пространство-время. «Точки» пространства-времени принято называть событиями. Событие характеризуется пространственными координатами («где» оно произошло) и временем («когда» произошло). Движение материальной точки есть последовательность событий. Такая последовательность изображается линией, которая называется мировой линией.

В классической физике промежутки времени между двумя какими-либо событиями (например, две вспышки света) абсолютны, одинаковы для любых наблюдателей. Точно так же два наблюдателя, находящиеся в разных инерциальных системах отсчета, получат одинаковые результаты при измерении пространственного расстояния между двумя точками. Преобразования Лоренца приводят к тому, что суждения о временной последовательности событий, равно как и результаты измерения пространственных расстояний, зависят от скорости движения наблюдателя.

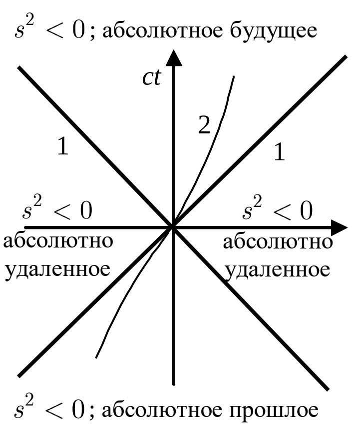

Рис.2. Конус событий

На рис. 2 изображена пространственно-временная диаграмма; x – пространственная координата, t – время. Начало координат связано с событием O. Мировые линии фотонов изображены прямыми 1. Они называются световыми линиями, а также нулевыми линиями – название подчеркивает тот факт, что на них $ds^2 = 0$. Движение материальной точки с переменной скоростью изображается кривой мировой линией 2.

Все события, расположенные на рисунке вверху между линиями 1, являются для всех наблюдателей абсолютно будущими по отношению к событию O, внизу – абсолютно прошлыми. События справа и слева являются абсолютно удаленными относительно события O и не могут быть с ним причинно связанными. События, расположенные на оси x, являются одновременными с событием O.

Выражению (2.3) можно придать следующий вид:

$$ds^2 = \eta_{ik} dx^i dx^k . \qquad (2.4)$$

Индексы i и k пробегают значения 0, 1, 2, 3; $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$, по повторяющимся индексам производится суммирование (правило Эйнштейна). В дальнейшем используются также греческие индексы, которые могут принимать значения 1, 2, 3. Набор величин η_{ik} задает правило вычисления «расстояния» в пространстве-времени (определяет метрику) и называется метрическим тензором. В нашем случае $\eta_{00} = 1$, $\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = -1$, остальные компоненты равны нулю. О различии в написании индексов (вверху и внизу) будет сказано ниже. Такое пространство-время называется пространством-временем Минковского, его геометрия псевдоевклидовая. Термин «псевдоэвклидовая геометрия» подчеркивает то обстоятельство, что квадраты дифференциалов времени и пространственных координат входят в выражение (2.3) с разными знаками. Специальная теория относительности описывает физические процессы в плоском пространстве-времени Минковского.

§ 2. 4-мерные векторы. 4-мерные тензоры

В специальной теории относительности вводятся 4-мерные векторы (4-векторы). Четырехмерным вектором $A^i = \left(A^0, \vec{A}\right)$ называют набор четырех величин, которые при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой преобразуются как координаты и время материальной точки, т.е. в соответствии с преобразованиями Лоренца. С этой точки зрения координаты материальной точки вместе с показаниями часов являются компонентами 4-радиус-вектора точки.

Преобразования Лоренца оставляют инвариантной комбинацию компонент 4-вектора

$$(A)^2 = \left(A^0\right)^2 - \left(A^1\right)^2 - \left(A^2\right)^2 - \left(A^3\right)^2 . \tag{2.5}$$

Этому выражению можно придать вид, подобный выражению для модуля вектора в трехмерном пространстве. Введем четверку величин по правилу $A_0 = A^0$, $A_1 = -A^1$, $A_2 = -A^2$, $A_3 = -A^3$. Тогда инвариант вектора приобретает вид

$$(A)^2 = A_i A^i = A_0 A^0 + A_1 A^1 + A_2 A^2 + A_3 A^3 . \tag{2.6}$$

Совокупность величин A^i называется контравариантным вектором, A_i – ковариантный вектор.

Учитывая (2.4), запишем выражение для инварианта 4-вектора следующим образом:

$$(A)^2 = \eta_{ik} A^i A^k . \tag{2.7}$$

Из (2.6) и (2.7) получаем связь компонент ковариантного и контравариантного 4-векторов:

$$A_i = \eta_{ik} A^k \tag{2.8}$$

Операция (2.8) носит наименование «опускания» индексов.

По аналогии с 4-векторами вводятся 4-тензоры 2-го ранга. Контравариантным 4-тензором 2-го ранга называется совокупность 16 величин, которые при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой преобразуются как прямое произведение двух контравариантных 4-векторов:

$$T^{ik} = A^i B^k .$$

Соответственно ковариантным тензором T_{ik} называется совокупность величин, которые преобразуются как прямое произведение ковариантных 4-векторов $A_i B_k$. Смешанным 4-тензором 2-го ранга называется совокупность величин, преобразующихся как прямое произведение контравариантного и ковариантного 4-векторов. Заметим, что при использовании смешанного тензора нужно следить за тем, какой индекс является верхним, а какой – нижним, потому что в общем случае $T^i{}_k \neq T_k{}^i$. У симметричного тензора смешанные компоненты

$T^i{}_k = T_k{}^i$. В этом случае принято располагать индексы один над другим (T_k^i). Аналогично вводятся тензоры более высокого ранга.

Метрический тензор η_{ik} можно также записать в контравариантном виде η^{ik}, причем $\eta_{ik}\eta^{kl} = \delta_i^l$, где δ_i^l - символ Кронекера (единичный 4-мерный тензор). Контравариантный метрический тензор позволяет поднимать индексы:

$$A^i = \eta^{ik} A_k .$$

В заключение заметим, что при анализе физических процессов в плоском пространстве-времени Минковского можно обойтись без введения ко- и контравариантых векторов и тензоров. В этом случае часто используются координаты Минковского $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_4 = ict$, где i – мнимая единица. Выражение для квадрата интервала (2.3) принимает вид:

$$ds^2 = dx_1{}^2 + dx_2{}^2 + dx_3{}^2 + dx_4{}^2 .$$

Очевидно, что таким образом определенное действие отличается от (2.3) знаком. Подчеркнем, что координаты Минковского можно использовать только в плоском пространстве-времени, поэтому далее они не применяются.

§ 3. Принцип наименьшего действия

Для всякой механической системы существует интеграл, называемый действием S, который минимален для действительного движения; его вариация равна нулю: $\delta S = 0$.

Пусть у нас имеется свободная частица. Интеграл не должен зависеть от выбора инерциальной системы отсчета, т.е. он является инвариантом относительно преобразований Лоренца. Тогда действие должно быть представимо в виде интеграла от скаляра. Под интегралом возможны дифференциалы, но не выше первого порядка. Для свободной частицы естественно принять

$$S = \beta \int_a^b ds .$$

Здесь a и b суть события. Указанный интеграл для мировой линии свободной частицы максимален; он может быть сколь угодно малым вдоль произвольной мировой линии, проходящей через события a и b. Если $\beta < 0$ ($\beta = -\alpha$, $\alpha > 0$), то таким образом определенное действие будет минимально вдоль мировой линии действительного движения.

$$S = -\alpha \int_a^b ds \,. \tag{2.9}$$

Постоянная α должна характеризовать частицу.

Действие можно также выразить через функцию Лагранжа L частицы:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt \,. \tag{2.10}$$

Вспоминая, что

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 = c^2 dt^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right), \quad \text{т.е.} \quad ds = cdt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \,,$$

где v - пространственная скорость материальной частицы, имеем из (2.9):

$$S = -\alpha \int_{t_1}^{t_2} c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt \,.$$

Сравнивая полученное выражение и (2.10), заключаем, что

$$L = -\alpha c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \,.$$

Для определения величины α рассмотрим нерелятивистский предел $v \ll c$:

$$L = -\alpha c\left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right) = -\alpha c + \alpha \frac{v^2}{2c} \,.$$

Так как в уравнении Лагранжа постоянная добавка к функции Лагранжа несущественна, то

$$L_{c\to\infty} = \alpha\frac{v^2}{2c} = \frac{mv^2}{2}$$

(функция Лагранжа для свободной нерелятивистской частицы). Отсюда можно сделать вывод, что $\alpha = mc$. В результате выражения для действия и функции Лагранжа свободной материальной частицы будут таковы:

$$S = -mc\int_a^b ds\,; \qquad L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,. \tag{2.11}$$

§ 4. Импульс и энергия частицы

Из механики известно, что импульс материальной точки может быть определен через ее функцию Лагранжа:

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}}\,. \tag{2.12}$$

Используя выражение для функции Лагранжа (2.11), получаем

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = mc^2\frac{1}{2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cdot\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial}{\partial \vec{v}}\left(\vec{v}\vec{v}\right) = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,,$$

т.е.

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,. \tag{2.13}$$

В нерелятивистском пределе из (2.13) получаем известное выражение $\vec{p} = m\vec{v}$.

Энергия материальной точки $E = \vec{p}\vec{v} - L$. Подставим L и $\vec{p}$:

$$E = \frac{mv^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{mv^2 + mc^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,;$$

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{2.14}$$

Используя (2.13) и (2.14), для импульса и энергии материалльной точки можно получить:

$$\vec{p} = \frac{E\vec{v}}{c^2} \tag{2.15}$$

В нерелятивистском пределе энергия материальной точки равна

$$E_{v \ll c} = mc^2\left(1+\frac{v^2}{2c^2}\right) = mc^2 + \frac{mv^2}{2}.$$

Величина mc^2 является энергией покоя частицы.

Возведем в квадрат выражения для импульса (2.13), энергии (2.14):

$$p^2 = \frac{mv^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}; \quad E^2 = \frac{m^2c^4}{1-\frac{v^2}{c^2}}; \quad p^2 + m^2c^2 = \frac{m^2c^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{E^2}{c^2}.$$

Энергия, выраженная через импульс, есть функция Гамильтона H. Для нее

$$H = c\sqrt{p^2 + m^2c^2} = \sqrt{p^2c^2 + \left(mc^2\right)^2} \tag{2.16}$$

При малых скоростях

$$H = mc^2\left(1+\frac{p^2}{2m^2c^2}\right) = mc^2 + \frac{p^2}{2m}.$$

При приближении скорости частицы к скорости света импульс и энергия частицы с конечной массой бесконечно нарастают. Таким образом, никакое материальное тело с конечной массой не может двигаться со скоростью, равной скорости света. Если же масса частицы равна нулю, то такая частица может двигаться со скоростью света. Для нее $E = pc$, как и для частиц с конечной массой в ультрарелятивистском пределе.

§ 5. 4-мерная скорость. 4-мерное ускорение

4-мерный вектор скорости частицы может быть определен так:

$$u^i = \frac{dx^i}{ds}. \tag{2.17}$$

Заметим, что 4-скорость является безразмерной величиной. Как и любой 4-вектор, 4-скорость имеет временную и пространственные компоненты. Используя выражение для интервала в виде $ds = cdt\sqrt{1-v^2/c^2}$ ($\vec{v}$ - «обычная», трехмерная скорость), получаем для временной компоненты u^0 и пространственных компонент u^α:

$$u^0 = \frac{dx^0}{cdt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; \quad u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{cdt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{v^\alpha}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Компоненты u^i не являются независимыми. Запишем выражение для интервала в виде $ds^2 = dx_i dx^i$. Тогда очевидно, что

$$\frac{ds^2}{ds^2} = \frac{dx_i}{ds}\frac{dx^i}{ds} = u_i u^i = 1,$$

т.е. вектор 4-скорости является единичным вектором касательной к мировой линии.

По аналогии с 4-скоростью вводится вектор 4-ускорения:

$$w^i = \frac{du^i}{ds} = \frac{d^2x^i}{ds^2}.$$

Дифференцируя по интервалу выражение $u_i u^i = 1$ для инварианта 4-скорости, получаем

$$\frac{du_i}{ds}u^i + u_i\frac{du^i}{ds} = w_i u^i + u_i w^i = 0.$$

Заметим, что в скалярном произведении векторов можно одновременно опустить индекс у одного сомножителя и поднять – у другого. Тогда $w_i u^i = w^i u_i = 0$, т.е. векторы 4-скорости и 4-ускорения ортогональны.

§ 6. Движение свободной частицы

Согласно принципу наименьшего действия мировая линия действительного движения материальной точки может быть определена из условия

$$\delta S = -mc\delta\int_a^b ds = 0\,, \tag{2.18}$$

где a и b - фиксированные события. Операции варьирования и вычисления интеграла могут быть переставлены местами.

Вычислим вариацию дифференциала действия δds. Так как $ds = \sqrt{dx_i dx^i}$, то

$$\delta ds = \frac{\delta dx_i dx^i + dx_i \delta dx^i}{2\sqrt{dx_i dx^i}} = \frac{dx_i \delta dx^i}{ds}\,.$$

Тогда

$$\delta S = -mc\int_a^b \frac{dx_i \delta dx^i}{ds} = -mc\int_a^b u_i \delta dx^i = -mc\int_a^b u_i d\delta x^i\,.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\delta S = -mcu_i \delta x^i \Big|_a^b + mc\int_a^b \delta x^i du_i\,. \tag{2.19}$$

Повторим, что события a и b фиксированы, их координаты не подлежат изменению при варьировании мировых линий, поэтому первое слагаемое в полученном выражении равно нулю.

Требование равенства нулю вариации действия сводится, таким образом, к условию

$$\int_a^b \delta x^i du_i = 0\,. \tag{2.20}$$

Так как вариации координат могут быть любыми, то свободная частица должна двигаться так, чтобы $du_i = 0$. Четырехмерная скорость свободной частицы не меняется в процессе движения, мировые линии свободных частиц являются прямыми линиями.

§ 7. Вектор энергии-импульса. Четырехмерная сила

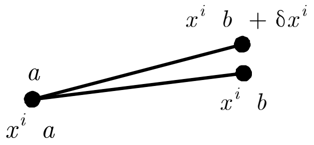

Рис. 3. Мировые линии двух свободных частиц

Рассмотрим отрезки мировых линий двух свободных частиц (рис. 3). Для них событие a является общим, а координаты события b отличаются на δx^i. Действие для движения двух частиц отличается на величину

$$\delta S = -mcu_i \delta x^i \Big|_a^b = -mcu_i \delta x^i ,$$

так как в силу (2.20) интеграл в (2.19) равен нулю.

По определению (из механики) четырехмерный импульс связан с действием следующим образом:

$$-\frac{\partial S}{\partial x^i} = p_i , \qquad (2.21)$$

Отсюда видно, что $p_i = mcu_i$, $\quad p^i = mcu^i$.

Вычислим компоненты 4-импульса, подставив выражение 4-скорости:

$$u^i = \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \frac{\vec{v}}{c\sqrt{1-v^2/c^2}} \right); \qquad \beta = \frac{v}{c} .$$

$$p^i = \left(\frac{mc}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) = \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right), \qquad (2.22)$$

В релятивистской механике энергия и импульс являются компонентами четырехмерного вектора импульса. Отсюда следуют формулы преобразования, например:

$$p_x = \frac{p_x' + \frac{V}{c^2} E'}{\sqrt{1-V^2/c^2}}; \quad \ldots \quad E = \frac{E' + Vp_x'}{\sqrt{1-V^2/c^2}} .$$

Из определения p^i и тождества $u^i u_i = 1$ для 4-импульса получаем

$$p_i p^i = m^2 c^2 u_i u^i = m^2 c^2 . \quad (2.23)$$

Подставим в последнее выражение (2.22):

$$\left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) \cdot \left(\frac{E}{c}, -\vec{p}\right) = \frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2 c^2 .$$

Мы снова получили связь между энергией и импульсом релятивистской частицы, см. (2.16).

В релятивистском случае определение силы через скорость изменения импульса становится некорректным. Легко убедиться, что нелинейная зависимость трехмерного импульса частицы от ее пространственной скорости приводит к различным выражениям для силы в зависимости от характера движения.

Упражнение 1.1. Вычислить $\dot{\vec{p}}$ в случае равномерного прямолинейного движения и в случае равномерного движения по окружности.

По аналогии с определением ускорения и скорости четырехмерную силу нужно определить так:

$$g^i = \frac{dp^i}{ds} = mc \frac{du^i}{ds} . \quad (2.24)$$

Так как $u^i \perp w_i$ и $u_i \perp w^i$, то $g^i u_i = 0$, то есть четырехмерная сила ортогональна четырехмерной скорости.

Подставляя в определение четырехмерной силы выражения для импульса и интервала, получим значения временной и пространственных компонент 4-силы:

$$g^0 = \frac{dp^0}{ds} = \frac{1}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{d}{dt}\left(\frac{E}{c}\right) = \frac{1}{c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{dE}{dt} .$$

Так как $E = c\sqrt{p^2 + m^2 c^2}$, то

$$\frac{dE}{dt} = \frac{c \cdot 2\vec{p}}{2\sqrt{p^2 + m^2 c^2}} \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{c^2 \vec{p}}{E} \frac{d\vec{p}}{dt} .$$

Но, как было показано выше, $\vec{p} = \frac{E\vec{v}}{c^2}$ (см. (2.15)), поэтому

$$\frac{dE}{dt} = \vec{v}\,\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v}\cdot\vec{f}\,. \qquad (2.25)$$

Как и следовало ожидать, производная по времени от энергии равна мощности. Таким образом, временная компонента вектора 4- мерной силы связана с работой:

$$g^0 = \frac{\vec{v}\cdot\vec{f}}{c^2\sqrt{1-v^2/c^2}}\,.$$

Пространственные компоненты 4-силы таковы:

$$g^\alpha = \frac{dp^\alpha}{ds} = \frac{dp^\alpha}{c\sqrt{1-v^2/c^2}\,dt} = \frac{\vec{f}}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}\,.$$

Собирая вместе выражения для компонент, получим 4-силу:

$$g^i = \left(\frac{\vec{f}\cdot\vec{v}}{c^2\sqrt{1-v^2/c^2}}, \frac{\vec{f}}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) \qquad (2.26)$$

§ 8. Релятивистское уравнение Гамильтона-Якоби

Возьмем свертку четырехмерного импульса $p^i p_i = m^2c^2$ и подставим в нее связь импульса и действия $p_i = -\frac{\partial S}{\partial x^i}$.

$$\frac{\partial S}{\partial x_i}\frac{\partial S}{\partial x^i} = g^{ik}\,\frac{\partial S}{\partial x^k}\frac{\partial S}{\partial x^i} = m^2c^2\,. \qquad (2.27)$$

Соотношение (2.27) является релятивистским уравнением Гамильтона–Якоби. Чтобы в этом убедиться, перейдем в (2.27) к нерелятивистскому пределу. С использованием обычных обозначений для пространственных координат и времени уравнение Гамильтона–Якоби перепишем так:

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2-\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2=m^2c^2. \qquad (2.28)$$

Нерелятивистская (L_1) и релятивистская функции Лагранжа L отличаются на величину mc^2: $L=L_1-mc^2$. Так как действие $S=\int Ldt$, то

$$S=S_1-mc^2t, \qquad \frac{\partial S}{\partial t}=\frac{\partial S_1}{\partial t}-mc^2,$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2=\left(\frac{\partial S_1}{\partial t}\right)^2-2mc^2\frac{\partial S_1}{\partial t}+m^2c^4, \qquad \frac{\partial S}{\partial x^\alpha}=\frac{\partial S_1}{\partial x^\alpha}.$$

Подставляя полученные производные действия в (2.28), имеем

$$\frac{1}{2mc^2}\left(\frac{\partial S_1}{\partial t}\right)^2-\frac{\partial S_1}{\partial t}-\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S_1}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial S_1}{\partial z}\right)^2\right]=0. \qquad (2.29)$$

В пределе $c\to\infty$ получим

$$\frac{\partial S_1}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S_1}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial S_1}{\partial z}\right)^2\right]=0,$$

или, учитывая, что $-\frac{\partial S_1}{\partial x^\alpha}=p_\alpha$:

$$\frac{\partial S_1}{\partial t}+\frac{p^2}{2m}=0.$$

Второе слагаемое здесь есть функция Гамильтона для материальной точки. Мы получили нерелятивистское уравнение Гамильтона–Якоби:

$$\frac{\partial S_1}{\partial t}+H(p)=0. \qquad (2.30)$$

Таким образом, уравнение

$$g^{ik}\frac{\partial S}{\partial x^k}\frac{\partial S}{\partial x^i}=m^2c^2$$

является релятивистским уравнением Гамильтона–-Якоби.

§ 9. Обобщение интегральных теорем

Тензоры δ_i^k, η_{ik}, η^{ik} исключительны тем, что их компоненты одинаковы во всех инерционных системах отсчета. Таким же свойством обладает единичный совершенно антисимметричный тензор четвертого ранга e^{iklm}. Компоненты этого тензора меняют знак при перестановке любых двух индексов. Следовательно, компоненты, у которых совпадают хотя бы 2 индекса, равны нулю. Отличными от нуля являются компоненты, у которых все четыре индекса различны. Обычно принимается $e^{0123} = +1$ ($e_{0123} = -1$ – опускание трех пространственных индексов сопровождается трехкратной сменой). Остальные компоненты равны единице (или -1), если число перестановок, с помощью которых последовательность $iklm$ приводится к последовательности 0123, будет четным (нечетным). Полное число перестановок равно $4! = 24$, поэтому

$$e^{iklm}e_{iklm} = -24 .$$

По отношению к поворотам системы координат компоненты e^{iklm} преобразуются как компоненты тензора, но при изменении знака одной из координат они знак не меняют, следовательно, e^{iklm} - это псевдотензор.

В трехмерном пространстве аналогом e^{iklm} является тензор $e_{\alpha\beta\gamma}$:

$$e_{123} = 1; \quad e_{\alpha\beta\gamma}e_{\lambda\mu\gamma} = \delta_{\alpha\lambda}\delta_{\beta\mu} - \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\lambda},$$
$$e_{\alpha\beta\gamma}e_{\lambda\beta\gamma} = \delta_{\alpha\lambda}\delta_{\beta\beta} - \delta_{\alpha\beta}\delta_{\beta\lambda} = 3\delta_{\alpha\lambda} - \delta_{\alpha\lambda} = 2\delta_{\alpha\lambda},$$
$$e_{\alpha\beta\gamma}e_{\alpha\beta\gamma} = 2\delta_{\alpha\alpha} = 6 .$$

Если A^{ik} - антисимметричный тензор, то тензор $A^{*ik} = \frac{1}{2}e^{iklm}A_{lm}$ дуален к A^{ik}. Аналогично, $e^{iklm}A_m$ - антисимметричный псевдотензор третьего ранга, дуальный вектору A_i.

В трехмерном пространстве интегрирование может производиться по объему, поверхности и кривой. В четырехмерном пространстве таких возможностей больше. Для упрощения пространственные и временную координату различать не будем.

1. Интегрирование по кривой в четырехмерном пространстве.

Элементом интегрирования является элемент длины, т.е. четырехмерный вектор dx^i.

2. Интегрирование по двумерной поверхности в четырехмерном пространстве.

В трехмерном пространстве проекция параллелограмма, построенного на двух векторах $\vec{r}$ и $\vec{r}'$, на плоскость $x_\alpha x_\beta$ (проекция площадки на координатную плоскость) равна $dx_\alpha dx'_\beta - dx_\beta dx'_\alpha$. Действи-

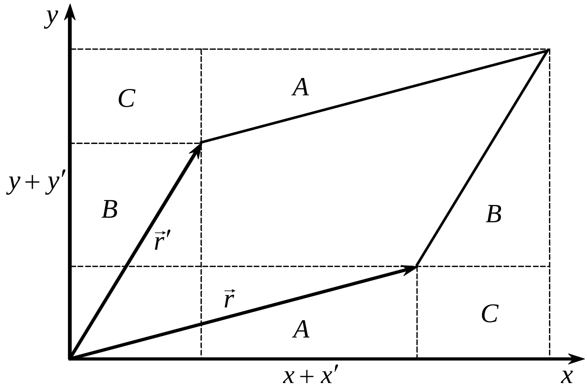

Рис. 4. К вычислению площади параллелограмма

тельно, рассмотрим простой случай, когда векторы $\vec{r}$ и $\vec{r}'$ лежат в плоскости $x0y$ (рис. 4). Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{r}$ и $\vec{r}'$ равна

$$S_{\square} = (x + x')(y + y') - 2S_A - 2S_B - 2S_C = xy' - x'y .$$

Мы приходим к выражению для дифференциала поверхности в трехмерном пространстве:

$$dx_\alpha dx'_\beta - dx_\beta dx'_\alpha = df_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} dx_\alpha & dx'_\alpha \\ dx_\beta & dx'_\beta \end{vmatrix} .$$

Очевидно, в случае четырехмерного пространства мы должны поступать аналогичным образом. Бесконечно малый элемент двумерной поверхности в четырехмерном пространстве описывается антисимметричным тензором второго ранга:

$$df^{ik} = dx^i dx'^k - dx^k dx'^i .$$

Его компоненты суть проекции элемента на координатные плоскости.

В трехмерном пространстве вместо тензора $df_{\alpha\beta}$ часто используется вектор df_α, дуальный тензору $df_{\alpha\beta}$:

$$df_\alpha = \frac{1}{2} e_{\alpha\beta\gamma} df_{\beta\gamma} .$$

Этот вектор нормален к элементу поверхности, т.е. он ортогонален любой прямой, лежащей на поверхности; его модуль численно равен площади элемента поверхности.

В четырехмерном пространстве такого вектора нет, но можно построить дуальный тензор df^{*ik} такой, что

$$df^{*ik} = \frac{1}{2} e^{iklm} df_{lm} .$$

Тензор df^{*ik} задает элемент поверхности, равный и ортогональный df^{ik}.

3. Интегрирование по гиперповерхности, то есть по трехмерному многообразию.

В трехмерном пространстве объем параллелограмма, построенного на трех векторах, равен определителю третьего порядка, элементами которого являются компоненты этих векторов. В четырехмерном пространстве величины проекций параллелепипеда (т.е. фрагмента гиперповерхности), построенного на трех четырехмерных векторах dx^i, dx'^i и dx''^i, задаются определителем

$$dS^{ikl} = \begin{vmatrix} dx^i & dx'^i & dx''^i \\ dx^k & dx'^k & dx''^k \\ dx^l & dx'^l & dx''^l \end{vmatrix},$$

который есть тензор третьего ранга, антисимметричный по трем индексам. Иногда удобно использовать четырехмерный вектор dS^i, дуальный dS^{ikl}:

$$dS^i = -\frac{1}{6} e^{iklm} dS_{klm} .$$

Заметим, что

$$dS^0 = dS^{123} . \qquad (2.31)$$

В специальной теории относительности четырехмерное пространство есть пространство-время Минковского. Тогда в правой части (2.31) dS^{123} есть объем параллелепипеда, построенного на dx, dy и dz, то есть $dS^{123} = dxdydz = dV$. Величина dS^0 равна величине проекции элемента гиперповерхности dS^{123} на гиперплоскость $x^0 = const$.

4. Интеграл по объему.

Элементом интегрирования является произведение дифференциалов всех четырех координат

$$d\Omega = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = cdtdV .$$

Величина $d\Omega$ инвариантна при преобразованиях Лоренца.

Перейдем к обобщению интегральных теорем. Теорема Гаусса в случае трехмерного пространства естественно трансформируется следующим образом. Интеграл по гиперповерхности можно преобразовать в интеграл по четырехмерному объему внутри этой гиперповерхности:

$$dS_i \to d\Omega \cdot \frac{\partial}{\partial x^i} .$$

Например, для векторного поля A^i получаем четырехмерную теорему Гаусса:

$$\oint A^i dS_i = \int \frac{\partial A^i}{\partial x^i} d\Omega . \tag{2.32}$$

Интеграл по двумерной поверхности преобразуется в интеграл по охватываемой ею гиперповерхности:

$$df_{ik}^* \to dS_i \frac{\partial}{\partial x^k} - dS_k \frac{\partial}{\partial x^i} .$$

Интеграл по четырехмерной замкнутой линии связан с интегралом по охватываемой ею поверхности:

$$dx^i \to df^{ki} \frac{\partial}{\partial x^k} .$$

Так для вектора мы получаем теорему Стокса:

$$\oint A_i dx^i = \int df^{ki} \frac{\partial A_i}{\partial x^k} = \tag{2.33}$$

$$=\frac{1}{2}\int df^{ki}\left(\frac{\partial A_i}{\partial x^k}-\frac{\partial A_k}{\partial x^i}\right)=\frac{1}{2}\int df^{ik}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i}-\frac{\partial A_i}{\partial x^k}\right).$$

§ 10. Тензор энергии-импульса

Рассмотрим некоторую систему, не конкретизируя ее особенности, действие для которой запишем в виде

$$S=\int\Lambda\left(q,\frac{\partial q}{\partial x^i}\right)dVdt=\frac{1}{c}\int\Lambda d\Omega\,. \tag{2.34}$$

Здесь Λ – некоторая функция величин q и $\partial q/\partial x^i$ (для электромагнитного поля, например, это потенциалы и их производные), которые определяют состояние системы. Для упрощения выкладок ограничимся пока случаем, когда есть только одна величина q.

Так как $S=\int L\,dt$, то $L=\int\Lambda dV$, то есть Λ является объемной плотностью функции Лагранжа. Из этого же выражения ясно, почему зависимость от q и ее производной берется только в первой степени.

Уравнения движения получаются варьированием действия S:

$$\delta S=\frac{1}{c}\int\delta\Lambda d\Omega\,, \tag{2.35}$$

$$\delta\Lambda=\frac{\partial\Lambda}{\partial q}\delta q+\frac{\partial\Lambda}{\partial\frac{\partial q}{\partial x^i}}\delta\frac{\partial q}{\partial x^i}=\frac{\partial\Lambda}{\partial q}\delta q+\frac{\partial\Lambda}{\partial\frac{\partial q}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^i}\delta q\,.$$

Последнее слагаемое представим в виде производной от произведения функций:

$$\delta\Lambda=\frac{\partial\Lambda}{\partial q}\delta q+\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial\frac{\partial q}{\partial x^i}}\delta q\right)-\delta q\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial\Lambda}{\partial\frac{\partial q}{\partial x^i}}\,.$$

Тогда вариация действия примет вид

$$\delta S=\frac{1}{c}\int\left[\frac{\partial\Lambda}{\partial q}\delta q-\delta q\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial\frac{\partial q}{\partial x^i}}\right)\right]d\Omega+\frac{1}{c}\int\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial\frac{\partial q}{\partial x^i}}\delta q\right)d\Omega\,.$$

Последний интеграл, преобразованный по теореме Гаусса, превратится в поток величины $\frac{\partial \Lambda}{\partial \frac{\partial q}{\partial x^i}} \delta q$ по поверхности, окружающей все пространство. На этой поверхности $\delta q = 0$, поэтому данный интеграл равен нулю.

Для получения уравнение движения потребуем равенства нулю вариации действия

$$\delta S = \frac{1}{c} \int \delta q \left[\frac{\partial \Lambda}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \frac{\partial q}{\partial x^i}} \right) \right] d\Omega = 0 . \qquad (2.36)$$

Равенство должно выполняться при любых вариациях δq, в результате получаем уравнение движения:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \frac{\partial q}{\partial x^i}} \right) - \frac{\partial \Lambda}{\partial q} = 0 . \qquad (2.37)$$

Производная плотности функции Лагранжа по координатам представима в виде

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x^i} = \frac{\partial \Lambda}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x^i} + \frac{\partial \Lambda}{\partial \frac{\partial q}{\partial x^k}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial q}{\partial x^k} \right).$$

Подставим в это равенство выражение для $\frac{\partial \Lambda}{\partial q}$ из уравнения движения:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \frac{\partial q}{\partial x^i}} \right).$$

Здесь индекс i (немой индекс) можно заменить индексом k. Получим

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \frac{\partial q}{\partial x^k}}\right)\frac{\partial q}{\partial x^i} + \frac{\partial \Lambda}{\partial \frac{\partial q}{\partial x^k}} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial q}{\partial x^k}\right) = 0 .$$

В последнем слагаемом изменим порядок дифференцирования $\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial q}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\partial q}{\partial x^i}$. Таким образом, получаем

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \frac{\partial q}{\partial x^k}}\right)\frac{\partial q}{\partial x^i} + \frac{\partial \Lambda}{\partial \frac{\partial q}{\partial x^k}} \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial q}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial}{\partial x^k}\left\{\frac{\partial \Lambda}{\partial \frac{\partial q}{\partial x^k}} \cdot \frac{\partial q}{\partial x^i}\right\}.$$

Производную в левой части равенства преобразуем, используя тензор δ_i^k:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x^i} = \delta_i^k \frac{\partial \Lambda}{\partial x^k}; \qquad \delta_i^k \frac{\partial \Lambda}{\partial x^k} - \frac{\partial}{\partial x^k}\left\{\frac{\partial \Lambda}{\partial \frac{\partial q}{\partial x^k}} \cdot \frac{\partial q}{\partial x^i}\right\} = 0,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left[\frac{\partial \Lambda}{\partial \frac{\partial q}{\partial x^k}} \cdot \frac{\partial q}{\partial x^i} - \delta_i^k \Lambda\right] = 0 . \tag{2.38}$$

Введем величину

$$T_i^k = \frac{\partial \Lambda}{\partial \frac{\partial q}{\partial x^k}} \cdot \frac{\partial q}{\partial x^i} - \delta_i^k \Lambda . \tag{2.39}$$

Тогда для любой системы (замкнутой, так как в функции Лагранжа мы не включили явную зависимость от координат)

$$\frac{\partial}{\partial x^k} T_i^k = 0 . \tag{2.40}$$

Равенство нулю 4-дивергенции величины T^{ik} содержит некоторый закон сохранения. Действительно, проинтегрируем выражение (2.40) по 4-мерному объему рассматриваемой системы и преобразуем полученный интеграл в соответствии с теоремой Гаусса:

$$\int \frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} d\Omega = \oint T_i^k dS_k = 0 .$$

Здесь интегрирование производится по гиперповерхности, охватывающей систему. Такой поверхностью являются две гиперплоскости $x^0 = const$. Таким образом, интеграл $\int T_i^k dS_k$ одинаков, по какой гиперплоскости $x^0 = const$ не выполнялось бы интегрирование. Но, согласно (2.31), интегрирование по гиперплоскости $x^0 = const$ эквивалентно интегрированию по пространственному объему. Таким образом, равенство нулю 4-мерной дивергенции T_i^k приводит к сохранению вектора, который обозначим здесь как p^i:

$$p^i = b\int T^{ik} dS_k . \tag{2.41}$$

Для выяснения смысла вектора p^i и определения константы b рассмотрим временную компоненту (2.41):

$$p^0 = b\int T^{0k} dS_k = b\int T^{00} dV .$$

Согласно (2.39)

$$T^{00} = T_0^0 = \frac{\partial \Lambda}{\partial \dfrac{\partial q}{\partial x^0}} \cdot \frac{\partial q}{\partial x^0} - \delta_0^0 \Lambda = \dot{q}\frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}} - \Lambda ; \qquad \dot{q} = \frac{\partial q}{\partial t} .$$

Вспоминая связь между энергией, импульсом материальной точки и функцией Лагранжа

$$E = \vec{p} \cdot \vec{v} - L ; \qquad \vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} ,$$

приходим к выводу, что величина T^{00} есть не что иное, как плотность энергии. Тогда 4-вектор p^i является 4-мерным импульсом системы, а константа b должна быть равной $1/c$. Окончательно имеем

$$p^i = \frac{1}{c}\int T^{ik} dS_k , \tag{2.42}$$

а тензор T^{ik} является тензором энергии-импульса системы.

Заметим, что в случае нескольких величин $q^{(l)}$ тензор энергии-импульса определяется выражением:

$$T_i^k = \sum_l \frac{\partial q^{(l)}}{\partial x^i} \frac{\partial \Lambda}{\partial \dfrac{\partial q^{(l)}}{\partial x^k}} - \delta_i^k \Lambda .$$

Такое введение тензора энергии-импульса является неоднозначным. Эту неоднозначность можно снять, потребовав выполнения обычной связи импульса и момента импульса. В этом случае определяется условие, которому должен удовлетворять тензор энергии-импульса – он должен быть симметричным (см. [3], §32).

Вернемся к рассмотрению вектору импульса p^i. Если интегрирование выполнять по гиперплоскости $x^0 = const$, то

$$p^i = \frac{1}{c}\int T^{i0} dV .$$

Пространственные компоненты P^i образуют трехмерный импульс системы, а временная компонента – $\dfrac{E}{c}$. Поэтому величину $\left(\dfrac{1}{c}T^{10}, \dfrac{1}{c}T^{20}, \dfrac{1}{c}T^{30}\right)$ естественно назвать плотностью импульса системы, а T^{00} - плотностью энергии системы.

Для выяснения смысла остальных компонент T^{ik} запишем уравнение (2.40), выделяя временную и пространственные компоненты:

$$\frac{\partial T^{i0}}{\partial x^i} = 0 ; \qquad \frac{\partial T^{i\alpha}}{\partial x^i} = 0 :$$

$$\frac{\partial T^{00}}{c\partial t} + \frac{\partial T^{0\alpha}}{\partial x^\alpha} = 0 , \qquad \frac{\partial T^{0\alpha}}{c\partial t} + \frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = 0 . \tag{2.43}$$

Проинтегрируем первое уравнение в (2.43) по объему

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int T^{00} dV + \int \frac{\partial T^{0\alpha}}{\partial x^\alpha} dV = 0 .$$

Второе слагаемое преобразуем по трехмерной теореме Гаусса:

$$\int \frac{\partial T^{0\alpha}}{\partial x^{\alpha}} dV = \oint T^{0\alpha} df_{\alpha} \ ,$$

где последний интеграл берется по поверхности, охватывающей объем. Таким образом, получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \int T^{00} dV = -c \oint T^{0\alpha} df_{\alpha} \, .$$

Здесь в левой части уравнения находится скорость изменения энергии в объеме, справа – количество энергии, уходящей через границы объема. Тогда $cT^{0\alpha} = S^{\alpha}$ – вектор Умова–Пойнтинга (вектор плотности потока энергии), и плотность потока энергии равна плотности импульса, умноженной на квадрат скорости света.

Аналогично, из второго уравнения (2.43) получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \frac{1}{c} T^{\alpha 0} dV = -\oint T^{\alpha\beta} df_{\beta} \, .$$

Слева – изменение импульса в объеме за единицу времени, справа – количество импульса, вытекающего за единицу времени из объема.

Но тогда компоненты $T^{\alpha\beta}$ есть компоненты тензора плотности потока импульса – тензора напряжений. Сведем вместе полученные результаты. Компоненты тензора энергии-импульса таковы:

$$T^{ik} = \begin{pmatrix} W & S_x/c & S_y/c & S_z/c \\ S_x/c & \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ S_y/c & \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ S_z/c & \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}.$$

§ 11. Тензор энергии-импульса сплошной среды

В дальнейшем нам потребуется выражение для тензора энергии-импульса системы тел, рассматриваемой как сплошная среда.

Поток импульса через элемент поверхности $d\vec{f}$ тела есть сила, действующая на этот элемент, ее α -компонент равен $\sigma_{\alpha\beta} df_{\beta}$. Воспользуемся системой отсчета, в которой данный элемент покоится. В такой системе отсчета действует закон Паскаля, то есть давление одинаково в любом направлении, и $\sigma_{\alpha\beta} df_\beta = p df_\beta$. Таким образом, $\sigma_{\alpha\beta} = p\delta_{\alpha\beta}$.

Компоненты $T^{\alpha 0}$ (плотность импульса) для данного элемента в рассматриваемой системе отсчета равны нулю. T^{00} - плотность энергии ε, ε/c^2 – масса единицы собственного объема. Тогда в рассматриваемой системе отсчета тензор энергии-импульса принимает вид:

$$T^{ik} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \tag{2.44}$$

Что будет в другой системе отсчета? Четырехмерная скорость элемента объема u^i в системе отсчета, в которой этот объем покоится, имеет компоненты

$$u^i = (1, 0, 0, 0).$$

Выражение для T^{ik} должно быть таким, чтобы в собственной системе отсчета получалось (2.44). Таковым является выражение

$$T^{ik} = (p+\varepsilon) u^i u^k - p\eta^{ik},$$

$$T_i^k = (p+\varepsilon) u_i u^k - p\delta_i^k.$$

Глава 2. ГРАВИТАЦИЯ И МЕТРИКА

Гравитационное взаимодействие обладает следующей важной особенностью: движение любых тел при одних и тех же начальных условиях происходит одинаково, вне зависимости от масс этих тел. Поля тяготения тем самым отличаются от других известных физических полей. Это свойство позволяет провести аналогию между полями тяготения и неинерциальными системами отсчета. Более того, можно утверждать, что неинерциальная система отсчета эквивалентна некоторому гравитационному полю (принцип эквивалентности). Так, равномерно ускоренная система отсчета эквивалентна постоянному однородному гравитационному полю.

Поля, эквивалентные неинерциальным системам отсчета, не тождественны «истинным» гравитационными полями. На бесконечности они возрастают (например, вращающаяся система отсчета) или остаются постоянными, а истинные гравитационные поля всегда стремятся к нулю с удалением от гравитирующих масс.

Движение всех тел в гравитационном поле одинаково и в релятивистской механике. Тогда можно считать, что принцип эквивалентности справедлив и в релятивистском случае.

В неинерциальных системах отсчета квадрат бесконечно малого интервала уже не может быть представлен в виде $ds^2 = \eta_{ik} dx^i dx^k$, т.е. система координат становится криволинейной. Основная идея ОТО заключается в том, что и в случае тяготения все материальные тела движутся свободно (по инерции) по экстремальным линиям (геодезическим линиям) в искривленном пространстве-времени. Таким образом, гравитационные поля описываются метрикой пространства-времени.

В данной главе обсуждается основная идея общей теории относительности и приводятся основные сведения из геометрии пространств произвольной кривизны – геометрии Римана. Изложение основ римановой геометрии выполняется настолько подробно, насколько это необходимо для получения необходимых формул и соотношений. Этим же принципом авторы руководствовались и при изложении основ риманового анализа.

§ 1. Пропорциональность инертной и гравитационной массы

Упомянутая выше важнейшая особенность гравитационных полей сообщать различным материальным телам одинаковые ускорения впервые была обнаружена (экспериментально) Галилео Галилеем. В нерелятивистской физике роль уравнения движения тела играет второй закон Ньютона $\vec{F} = m_i\vec{a}$. Масса в данном случае является мерой инертности тела и называется инертной массой. С другой стороны, масса тела присутствует в законе всемирного тяготения. При этом масса является гравитационным зарядом, т.е. характеризует способность тела участвовать в гравитационном взаимодействии, и ее называют гравитационной массой m_g. Сила, с которой гравитационное поле действует на материальный объект, определяется гравитационной массой и потенциалом поля φ: $\vec{F} = -m_g\nabla\varphi$. Тогда для любых тел

$$\vec{a} = -\frac{m_g}{m_i}\nabla\varphi .$$

Независимость ускорения материальных тел от их массы при движении в гравитационном поле обусловлена пропорциональностью инертной массы и гравитационной массы. При надлежащем выборе единиц измерения коэффициент пропорциональности может быть положен равным единице. В таком случае говорят о равенстве инертной и гравитационной массы тела.

Точность измерений в опытах Галилея была невысока. Фон Этвеш (1890 г.) установил пропорциональность инертной и гравитационной массы с точностью не меньше, чем 10^{-8}. В 1961 г. Дикке установил факт пропорциональности инертной и гравитационной массы, повысив точность до 10^{-10}. Наконец, в 1971 г., в экспериментах группы Брагинского и Панова было установлено, что точность совпадения инертной и гравитационной не меньше, чем 10^{-12}.

Из специальной теории относительности известно, что инертная масса определяется энергией тела. Результаты экспериментов фон Этвеша, а тем более – Дикке, Брагинского, Панова позволяют сделать однозначный вывод: гравитационная масса также определяется энергией тела.

§ 2. Криволинейные координаты

Рассмотрим две системы отсчета (рис. 5.). Одна из них является инерциальной, x, y – координаты точки. Вторая система равномерно вращается с постоянной скоростью Ω вокруг оси $0z'$, совпадающей с осью $0z$.

В инерциальной системе отсчета квадрат интервала выглядит обычным образом (пространство-время плоское):

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 . \tag{2.1}$$

В неинерциальной системе отсчета ситуация сложнее. При переходе от одной системы отсчета к другой координаты преобразуются следующим образом:

$$x = x'\cos\Omega t - y'\sin\Omega t , \qquad y = x'\sin\Omega t + y'\cos\Omega t , \qquad z = z' .$$

Дифференциалы координат таковы:

$$dx = dx'\cos\Omega t - x'\Omega\sin\Omega t\cdot dt - dy'\sin\Omega t - y'\Omega\cos\Omega t\cdot dt ,$$

$$dy = dx'\sin\Omega t + x'\Omega\cos\Omega t\cdot dt + dy'\cos\Omega t - y'\Omega\sin\Omega t\cdot dt ,$$

$$dz = dz'$$

В результате квадрат интервала принимает вид

$$ds^2 = \left[c^2 - \Omega^2\left(x'^2 + y'^2\right)\right]dt^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 + 2\Omega y'dx'dt - 2\Omega x'dy'dt .$$

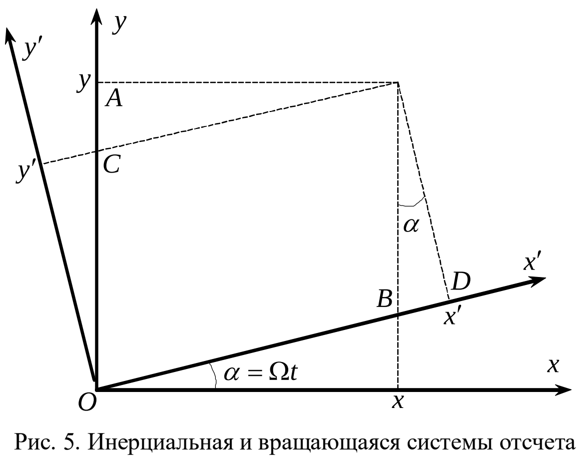

Рис. 5. Инерциальная и вращающаяся системы отсчета

Получается выражение, которое при любом законе преобразования времени не может быть приведено к виду (2.1). Таким образом, в неинерциальной системе отсчета квадрат интервала имеет вид

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k , \qquad (2.2)$$

где g_{ik} – некоторые функции координат x^1, x^2, x^3 и x^0. Тогда четырехмерная система координат x^0, x^1, x^2, x^3 является криволинейной.

Величины g_{ik} определяют свойства геометрии (устанавливают метрику пространства-времени). Они симметричны по индексам, следовательно, имеется 10 различных величин: g_{00}, g_{01}, g_{02}, g_{03}, g_{11}, g_{12}, g_{13}, g_{22}, g_{23}, g_{33}.

В инерциальной системе отсчета $g_{00} = 1$, $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$, $g_{ik} = 0$ при $i \neq k$:

$$g_{ik} = \eta_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Систему координат с такими величинами g_{ik} будем называть галилеевой (лоренцевой).

Неинерциальные системы отсчета эквивалентны некоторым полям. Эти поля описываются величинами g_{ik}. Всякое гравитационное поле есть искажение метрики, задаваемой коэффициентами g_{ik} (отличными от η_{ik}).

При переходе к неинерциальной системе отсчета величины η_{ik} превращаются в g_{ik} и обратным преобразованием координат могут быть приведены к галилеевым значениям. При этом величины g_{ik} получаются весьма специфичными. Произвольный набор 10 величин g_{ik} изменением только четырех координат нельзя привести к галилеевому виду. В общем случае произвольного переменного гравитационного поля метрика неэвклидова и изменяется со временем.

Законы природы должны записываться в общей теории относительности в виде, пригодном для использования в любой четырехмерной системе координат – в ковариантном виде. Так как системы отсчета могут быть любыми, нужна геометрия в форме, пригодной для расчетов в любых координатах.

§ 3. Риманова геометрия

Рассмотрим преобразование одной системы координат x^i $\left(i=\overline{0,3}\right)$ в другую x'^i:

$$x^i = f^i\left(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3\right),$$

где f^i - некоторые функции. При преобразовании координат их дифференциалы изменяются по закону:

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} dx'^k . \tag{2.3}$$

Назовем контравариантным четырехмерным вектором всякую совокупность четырех величин A^i, которые при преобразовании координат изменяются как их дифференциалы:

$$A^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} A'^k . \tag{2.4}$$

Пусть φ - некоторое скалярное поле. Его производные преобразуются по закону

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x'^k} \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} , \tag{2.5}$$

отличающемуся от (2.4).

Назовем ковариантным четырехмерным вектором совокупность четырех величин, которые при преобразовании координат изменяются как градиент скалярного поля

$$A_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} A'_k . \tag{2.6}$$

Аналогично определяются четырехмерные тензоры различных рангов. Контравариантный четырехмерный тензор второго ранга A^{ik} – это 16 величин, которые преобразуются по закону (произведение двух контравариантных векторов):

$$A^{ik} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^l} \frac{\partial x^k}{\partial x'^m} A'^{lm} .. \qquad (2.7)$$

Ковариантный тензор второго ранга определяется законом преобразования:

$$A_{ik} = \frac{\partial x'^l}{\partial x^i} \frac{\partial x'^m}{\partial x^k} A'_{lm} . \qquad (2.8)$$

Смешанный тензор второго ранга определяется так:

$$A^i_k = \frac{\partial x^i}{\partial x'^l} \frac{\partial x'^m}{\partial x^k} A'^l_m . \qquad (2.9)$$

Скалярное произведение четырехмерных векторов $A^i B_i$ инвариантно.

Упражнение 2.1. Показать, что при преобразовании координат скалярное произведение двух векторов является инвариантным.

Решение:

$$A^i B_i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} A'^k \frac{\partial x'^m}{\partial x^i} B'_m = \frac{\partial x'^m}{\partial x'^k} A'^k B'_m .$$

Поскольку

$$\frac{\partial x'^m}{\partial x'^k} = \begin{cases} 1, & m = k \\ 0, & m \neq k \end{cases},$$

то $A^i B_i = A'^m B'_m$; следовательно, скалярное произведение двух четырехмерных векторов – это инвариант.

Единичным четырехмерным тензором второго ранга называется тензор

$$\delta^i_k = \begin{cases} 0, \text{ при } i \neq k, \\ 1, \text{ при } i = k, \end{cases} \qquad (2.10)$$

(символ Кронекера).

Если A^k - это четырехмерный вектор, то его скалярное произведение с символом Кронекера есть снова вектор

$$A^k \delta^i_k = A^i , \qquad (2.11)$$

т.е. δ^i_k - тензор.

Упражнение 2.2. Доказать, что δ_k^i есть тензор.

Решение 1.

$$A^k B_i \delta_k^i = A^i B_i$$

В результате получили скаляр, следовательно, δ_k^i - тензор.

Решение 2.

Проверим преобразование δ_k^i при переходе от одной системы координат к другой. Из (2.9) имеем

$$\frac{\partial x'^l}{\partial x^i}\frac{\partial x^k}{\partial x'^m}\delta_k^i = \frac{\partial x'^l}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial x'^m} .$$

Поскольку матрицы $\frac{\partial x'^l}{\partial x^i}$ и $\frac{\partial x^i}{\partial x'^m}$ взаимно обратны, получаем

$$\frac{\partial x'^l}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial x'^m} = \delta_m^l .$$

Таким образом, δ_k^i - тензор.

§ 4. Квадрат расстояния в криволинейных координатах

В общем случае квадрат расстояния в криволинейных координатах

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k ,$$

где g_{ik} - функции координат. Произведение $dx^i dx^k$ есть контравариантный тензор, а ds^2 является скаляром скаляр. Тогда g_{ik} - ковариантный тензор (метрический тензор).

Тензоры A_{ik} и B^{ik} называются обратными, если

$$A_{ik} B^{kl} = \delta_i^l . \tag{2.12}$$

Контравариантный метрический тензор g^{ik} – это тензор, обратный тензору g_{ik}:

$$g_{ik} g^{kl} = \delta_i^l . \tag{2.13}$$

Индексы тензоров можно поднимать и опускать с помощью метрического тензора:

$$A^i = g^{ik} A_k, \quad A_i = g_{ik} A^k . \tag{2.14}$$

Квадрат расстояния определяется так:

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k = dx_k dx^k .$$

В галилеевой системе координат

$$g_{ik} = \eta_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \eta^{ik} . \tag{2.15}$$

Проверим:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \delta_k^i .$$

В плоском пространстве ко- и контравариантные компоненты вектора связаны. По аналогии с (2.14) для тензоров имеем

$$A_k^i = g^{il} A_{kl}, \quad A^{ik} = g^{il} g^{km} A_{lm} . \tag{2.16}$$

§ 5. Расстояния и промежутки времени

Выбор системы координат в общей теории относительности ничем не ограничен. x^1, x^2, x^3 - любые величины, определяющие расположение в пространстве, а x^0 - произвольно идущие часы. Как по значениям x^i определить «истинное расстояние» и «время»?

Рассмотрим два бесконечно близких события, происходящих в одной и той же точке пространства. Тогда, с одной стороны, интервал между этими двумя событиями будет равен

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 ,$$

где τ – собственное время. С другой стороны,

$$ds^2 = g_{00}\left(dx^0\right)^2 + g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta + g_{0\alpha}dx^0 dx^\alpha\,, \qquad \alpha = 1,2,3\,.$$

Так как события происходят в одной точке пространства $dx^1 = dx^2 = dx^3 = 0$, следовательно,

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{g_{00}}\,dx^0\,. \tag{2.17}$$

Величина промежутка времени между двумя любыми событиями, произошедшими в одной и той же точке пространства, равна:

$$\tau = \frac{1}{c}\int\sqrt{g_{00}}\,dx^0\,. \tag{2.18}$$

Выражения (2.17)-(2.18) определяют промежутки истинного (собственного) времени для данной точки пространства по изменению координаты x^0 (заметим, что $g_{00} > 0$).

Определим теперь dl – пространственное расстояние между двумя точками, бесконечно близкими в пространстве. В специальной теории относительности dl определяется как интервал между двумя бесконечно близкими событиями, происходящими в один и тот же момент времени. В общей теории относительности невозможно таким образом определить dl, поскольку нельзя просто положить $dx^0 = 0$ (в разных точках x^0 и время связаны по-разному, т.к. компоненты метрического тензора могут быть функциями координат).

Поступаем так: пусть из точки B отправляется световой сигнал в точку A, а затем обратно (рис. 6). Расстояние между точками A и B будет равно половине произведения времени, необходимого для такой процедуры, и скорости света. По определению, $ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k$. Выделим здесь пространственные координаты:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta + 2g_{0\beta}dx^0 dx^\alpha + g_{00}\left(dx^0\right)^2.$$

При распространении света $ds^2 = 0$, значит,

$$g_{00}\left(dx^0\right)^2 + 2g_{0\beta}dx^0 dx^\alpha + g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta = 0\,.$$

Решим это уравнение относительно dx^0:

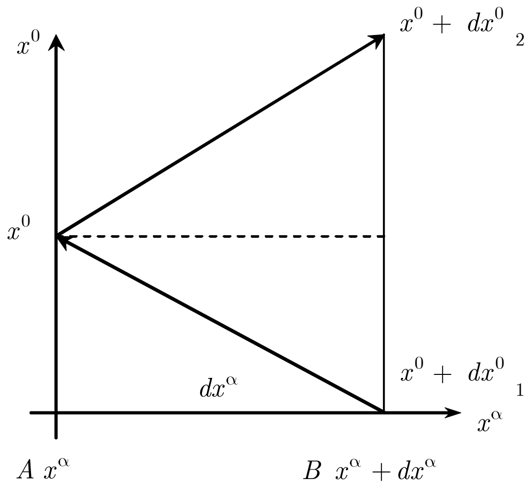

Рис. 6. Измерение пространственных расстояний

$$\left(dx^0\right)_{1,2} = \frac{1}{g_{00}}\left[-g_{0\alpha}dx^\alpha \pm \sqrt{g_{0\alpha}^2\left(dx^\alpha\right)^2 - g_{00}g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta}\right].$$

Преобразуем одно первое слагаемое в подкоренном выражении, изменив обозначение для немого индекса:

$$g_{0\alpha}^2\left(dx^\alpha\right)^2 = g_{0\alpha}dx^\alpha g_{0\beta}dx^\beta .$$

Тогда

$$\left(dx^0\right)_{1,2} = \frac{1}{g_{00}}\left[-g_{0\alpha}dx^\alpha \pm \sqrt{g_{0\alpha}g_{0\beta}dx^\alpha dx^\beta - g_{00}g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta}\right] =$$

$$= \frac{1}{g_{00}}\left[-g_{0\alpha}dx^\alpha \pm \sqrt{\left(g_{0\alpha}g_{0\beta} - g_{00}g_{\alpha\beta}\right)dx^\alpha dx^\beta}\right].$$

Интервал времени dx^0 от выхода светового сигнала из точки B до его возвращения составляет

$$\left(dx^0\right)_2 - \left(dx^0\right)_1 = \frac{2}{g_{00}}\sqrt{\left(g_{0\alpha}g_{0\beta} - g_{00}g_{\alpha\beta}\right)dx^\alpha dx^\beta} . \qquad (2.19)$$

Этот интервал можно преобразовать по формуле (2.17) в интервал собственного времени

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{g_{00}}\,\frac{2}{g_{00}}\sqrt{\left(g_{0\alpha}g_{0\beta} - g_{00}g_{\alpha\beta}\right)dx^{\alpha}dx^{\beta}} \ .$$

Учитывая, что расстояние $dl = \dfrac{cd\tau}{2}$, получаем

$$dl = \sqrt{\frac{g_{0\alpha}g_{0\beta} - g_{00}g_{\alpha\beta}}{g_{00}}\,dx^{\alpha}dx^{\beta}} \ ,$$

или

$$dl^2 = \frac{g_{0\alpha}g_{0\beta} - g_{00}g_{\alpha\beta}}{g_{00}}\,dx^{\alpha}dx^{\beta} .$$

Перепишем его в виде, аналогичном интервалу

$$dl^2 = \gamma_{\alpha\beta}dx^{\alpha}dx^{\beta} , \tag{2.20}$$

где

$$\gamma_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha}g_{0\beta}}{g_{00}} \tag{2.21}$$

– трехмерный метрический тензор, определяющий геометрические свойства пространства.

Соотношение (2.21) определяет связь между метрикой пространства и метрикой пространства-времени. Так как g_{ik} может зависеть от времени, то и пространственная метрика может изменяться с течением времени. По этой причине величину dl бессмысленно интегрировать, поскольку интеграл будет зависеть от того, по какой мировой линии его брать. Таким образом, в общей теории относительности понятие конечного расстояния теряет смысл.

Упражнение 2.3. Показать, что $\gamma_{\alpha\beta}$ является тензором, обратным контравариантному тензору $g^{\alpha\beta}$.

Решение. Известно, что

$$g^{ik}g_{kl} = \delta^{i}_{l} .$$

Распишем это выражение, выделив временную и пространственные компоненты:

$$g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} + g^{\alpha 0} g_{0\gamma} = \delta_\gamma^\alpha \tag{2.22}$$

$$g^{\alpha\beta} g_{\beta 0} + g^{\alpha 0} g_{00} = 0 \tag{2.23}$$

$$g^{0\beta} g_{\beta 0} + g^{00} g_{00} = 1 \tag{2.24}$$

Выразив из равенства (2.23) величину $g^{\alpha 0}$ и подставив полученное выражение в (2.22), будем иметь

$$g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} - \frac{g^{\alpha\beta} g_{\beta 0}}{g_{00}} g_{0\gamma} = \delta_\gamma^\alpha ,$$

или

$$g^{\alpha\beta} \left(g_{\beta\gamma} - \frac{g_{\beta 0}}{g_{00}} g_{0\gamma} \right) = -g^{\alpha\beta} \gamma_{\beta\gamma} = \delta_\gamma^\alpha .$$

В дальнейшем иногда будем использовать при расчетах трехмерный вектор g с ковариантными компонентами

$$g_\alpha = -\frac{g_{0\alpha}}{g_{00}} . \tag{2.25}$$

§ 6. Одновременность

Описанная выше процедура измерения пространственного расстояния может быть использована для синхронизации часов в искривленном пространстве-времени. В СТО одновременными являются события на трехмерной плоской гиперповерхности $t = const$. Вернемся к рис. 6. В точку A приходит световой сигнал из точки B . Нулевая координата этого события есть x^0 . Одновременным с этим событием мы должны рассматривать событие в точке B , нулевая координата которого такова:

$$\frac{\left(x^0 + \left(dx^0\right)_1\right) + \left(x^0 + \left(dx^0\right)_2\right)}{2} = x^0 + \frac{\left(dx^0\right)_1 + \left(dx^0\right)_2}{2} .$$

Величина

$$dx^0 = \frac{\left(dx^0\right)_1 + \left(dx^0\right)_2}{2} = -\frac{g_{0\alpha}}{g_{00}} dx^\alpha = -\gamma_\alpha dx^\alpha$$

определит поправку, которую необходимо прибавить к показаниям часов в точке B для их синхронизации с часами в точке A.

Синхронизация вдоль замкнутой линии в общем случае невозможна, поскольку $\oint dx^0 \neq 0$. Исключение составляют системы отсчета, в которых все компоненты $g_{0\alpha} = 0$. Заметим, что в любом реальном гравитационном поле можно систему отсчета (из четырех координат) выбрать так, чтобы обратить все $g_{0\alpha}$ (три величины) в нуль бесчисленным количеством способов.

§ 7. Ковариантное дифференцирование

В галилеевых координатах dA_i – вектор, $\partial A_i / \partial x^k$ – тензор. В криволинейных координатах dA_i – не вектор, а $\dfrac{\partial A_i}{\partial x^k}$ – не тензор. Величины dA_i – разность векторов, находящихся в разных (бесконечно близких) точках пространства, но в этих точках векторы преобразуются по-разному. Действительно,

$$A_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} A'_k .$$

$$dA_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} dA'_k + A'_k d\,\frac{\partial x'^k}{\partial x^i} = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} dA'_k + A'_k \frac{\partial^2 x'^k}{\partial x^i \partial x^l} dx^l .$$

Таким образом, dA_i будет вектором только при условии $\dfrac{\partial^2 x'^k}{\partial x^i \partial x^l} = 0$, что соответствует простому изменению масштабов, новые координаты x'^k являются линейными функциями x^k.

Как же можно дифференцировать вектор в криволинейных координатах? Какой тензор будет играть роль производной $\partial A_i / \partial x^k$?

Для того чтобы получить в криволинейных координатах дифференциал вектора, являющийся тоже вектором, нужно, чтобы оба вектора находились в одной точке пространства, т.е. перенести один вектор в точку, где находится другой вектор. Тогда разность этих векторов будет вычислена в одной и той же точке пространства. Процедура переноса должна быть такой, чтобы в галилеевых координатах эта разность совпадала с dA_i.

При переносе в галилеевых координатах компоненты вектора не должны измениться (параллельный перенос). При параллельном переносе в криволинейных координатах компоненты вектора меняются. Поэтому разность компонент после параллельного переноса в одну точку не будет совпадать с разностью до переноса dA_i.

Рассмотрим контравариантный вектор. Пусть его компоненты в точке x^i есть A^i. В соседней точке $x^i + dx^i$ компоненты $A^i + dA^i$. Подвергнем A^i бесконечно малому переносу в точку $x^i + dx^i$. При параллельном переносе вектор A^i изменится, и в точке $x^i + dx^i$ он будет равен $A^i + \delta A^i$. Тогда разность между векторами в одной точке будет представлена так:

$$DA^i = dA^i - \delta A^i. \tag{2.26}$$

Величина изменения δA^i при параллельном переносе зависит от величины компонент, причем линейно (сумма компонент должна преобразовываться так же, как и каждое из слагаемых), и от величины компонент вектора. Тогда можно записать, что

$$\delta A^i \equiv -\Gamma^i_{kl} A^k dx^l, \tag{2.27}$$

где Γ^i_{kl} - некоторая функция координат. В галилеевых координатах $\Gamma^i_{kl} = 0$. Ясно, что Γ^i_{kl} не является тензором.

Величины Γ^i_{kl} называются коэффициентами аффинной связности (символами Кристоффеля). Метрический тензор позволяет получить соотношения:

$$\Gamma_{i,kl} = g_{im}\Gamma^m_{kl}, \qquad \Gamma^i_{kl} = g^{im}\Gamma_{m,kl}. \tag{2.28}$$

Иногда величины Γ^i_{kl} и $\Gamma_{i,kl}$ называют соответственно символами Кристоффеля первого и второго рода.

Найдем изменение вектора δA_i при параллельном переносе. Заметим, что скалярное произведение векторов при их совместном параллельном переносе не должно измениться. Пусть есть векторы A_i и B^i, $A_i B^i$ – скаляр. Тогда при параллельном переносе $\delta\left(A_i B^i\right) = 0$.

$$\delta\left(A_i B^i\right) = \delta A_i \cdot B^i + A_i \cdot \delta B^i = 0\,,$$

тогда

$$B^i \cdot \delta A_i = -A_i \cdot \delta B^i + = \Gamma^i_{kl} B^k dx^l A_i\,.$$

Заменяя немые индексы $i \leftrightarrow k$ и учитывая то обстоятельство, что B^i – любой вектор, получим

$$\delta A_i = \Gamma^k_{il} A_k dx^l\,. \qquad (2.29)$$

Теперь вернемся к разности DA^i. Учитывая равенства (2.26) и (2.29), а также то, что $dA^i = \dfrac{\partial A^i}{\partial x^l} dx^l$, получим

$$DA^i = \frac{\partial A^i}{\partial x^l} dx^l + \Gamma^i_{kl} A^k dx^l = \left(\frac{\partial A^i}{\partial x^l} + \Gamma^i_{kl} A^k\right) dx^l\,. \qquad (2.30)$$

Аналогично получаем

$$DA_i = \left(\frac{\partial A_i}{\partial x^l} - \Gamma^k_{il} A_k\right) dx^l\,. \qquad (2.31)$$

Величины DA^i и DA_i являются векторами, так как это разности бесконечно малых векторов в одной и той же точке пространства. Тогда величины в скобках являются тензорами (в результате умножения тензора на вектор получаем вектор).

Мы получили правило вычисления ковариантных производных контравариантного вектора $A^i_{;l}$ и ковариантного вектора $A_{i;l}$ (операция дифференцирования обозначается точкой с запятой):

$$DA^i = A^i_{;l} dx^l\,; \qquad DA_i = A_{i;l} dx^l\,; \qquad (2.32)$$

$$A^i_{;l} = \frac{\partial A^i}{\partial x^l} + \Gamma^i_{kl} A^k\,; \qquad A_{i;l} = \frac{\partial A_i}{\partial x^l} - \Gamma^k_{il} A_k\,.$$

В галилеевых координатах $\Gamma^i_{kl} = 0$ и $A^i_{;l} = \dfrac{\partial A^i}{\partial x^l}$.

Получим правило ковариантного дифференцирования тензора 2-го ранга. Для этого нужно определить изменение тензора при бесконечно малом параллельном переносе. Рассмотрим контравариантный тензор, образованный из двух контравариантных векторов:

$$T^{ik} = A^i B^k .$$

При параллельном переносе (пренебрегая квадратичным слагаемым) имеем

$$\delta\left(A^i B^k\right) = \delta A^i \cdot B^k + A^i \cdot \delta B^k = -A^i \Gamma^k_{lm} B^l dx^m - B^k \Gamma^i_{lm} A^l dx^m =$$

$$= -\left(A^i B^l \Gamma^k_{lm} + A^l B^k \Gamma^i_{lm}\right) dx^m .$$

Заменяя индексы $l \leftrightarrow m$, получаем

$$\delta\left(A^i B^k\right) = -\left(A^i B^m \Gamma^k_{ml} + A^m B^k \Gamma^i_{ml}\right) dx^l .$$

В силу линейности преобразования это выражение верно для любого тензора:

$$\delta A^{ik} = -\left(A^{im} \Gamma^k_{ml} + A^{mk} \Gamma^i_{ml}\right) dx^l .$$

Далее находим

$$DA^{ik} = dA^{ik} - \delta A^{ik} = \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^l} dx^l + \left(A^{im} \Gamma^k_{ml} + A^{mk} \Gamma^i_{ml}\right) dx^l =$$

$$= \left(\frac{\partial A^{ik}}{\partial x^l} + A^{im} \Gamma^k_{ml} + A^{mk} \Gamma^i_{ml}\right) dx^l .$$

Окончательно получаем ковариантную производную контравариантного тензора:

$$A^{ik}_{,l} = \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^l} + \Gamma^k_{ml} A^{im} + \Gamma^i_{ml} A^{mk} . \qquad (2.33)$$

Упражнение 2.4. Найти ковариантные производные ковариантного и смешанного тензоров второго ранга.

Решение**.**

Найдем ковариантную производную ковариантного тензора второго ранга. Положим $T_{ik} = A_i B_k$. Тогда

$$\delta\left(A_i B_k\right) = \delta A_i \cdot B_k + A_i \cdot \delta B_k = B_k \Gamma^m_{il} A_m dx^l + A_i \Gamma^m_{kl} B_m dx^l =$$

$$= \left(A_m B_k \Gamma^m_{il} + A_i B_m \Gamma^m_{kl}\right) dx^l ,$$

$$DA_{ik} = dA_{ik} - \delta A_{ik} = \frac{\partial A_{ik}}{\partial x^l} dx^l - \left(A_{mk} \Gamma^m_{il} + A_{im} \Gamma^m_{kl} \right) dx^l ,$$

откуда

$$A_{ik;l} = dA_{ik} - \delta A_{ik} = \frac{\partial A_{ik}}{\partial x^l} - \Gamma^m_{il} A_{mk} - \Gamma^m_{kl} A_{im} . \qquad (2.34)$$

Найдем ковариантную производную смешанного тензора второго ранга. Полагая $T^i_k = A^i B_k$, получаем для приращения тензора

$$\delta\left(A^i B_k \right) = \delta A^i \cdot B_k - A^i \cdot \delta B_k = -A^m \Gamma^i_{ml} B_k dx^l + A^i \Gamma^m_{kl} B_m dx^l .$$

Тогда

$$DA^i_k = dA^i_k - \delta A^i_k = \left[\frac{\partial A^i_k}{\partial x^l} + \Gamma^m_{il} A^m_k - \Gamma^m_{kl} A^i_m \right] x^l ,$$

$$A^i_{k;l} = \frac{\partial A^i_k}{\partial x^l} + \Gamma^m_{il} A^m_k - \Gamma^m_{kl} A^i_m . \qquad (2.35)$$

Аналогично вычисляются ковариантные производные тензоров любого ранга.

Суммируя все сказанное выше, сформулируем правило ковариантного дифференцирования. Чтобы получить ковариантную производную тензора по переменной x^l , к «обычной производной» нужно добавить для каждого контравариантного индекса i слагаемое $\Gamma^i_{kl} A^{.k.}_{...}$, а для каждого ковариантного индекса i – слагаемое $-\Gamma^k_{il} A^{...}_{.k.}$.

Ковариантная производная от произведения определяется по обычному правилу вычисления производной произведения функций. Так, для произведения векторов $\left(A_i B_k \right)_{;l} = A_{i;l} B_k + A_i B_{k;l}$.

До сих пор речь шла о ковариантном дифференцировании. Существуют и контравариантные производные векторов, тензоров. Для их получения достаточно воспользоваться процедурой поднимания индексов с помощью метрического тензора

$$A_i^{;k} = g^{kl} A_{i;l} ; \quad A^{i;k} = g^{kl} A_l^{;i} . \qquad (2.36)$$

§ 8. Свойства символов Кристоффеля

Запишем выражение для ковариантной производной контравариантного вектора

$$A^i_{;l} = \frac{\partial A^i}{\partial x^l} + \Gamma^i_{kl} A^k . \tag{2.37}$$

Эта производная является смешанным тензором 2-го ранга. В другой системе координат

$$A^{i'}_{;l'} = \frac{\partial A^{i'}}{\partial x^{l'}} + \Gamma^{i'}_{k'l''} A^{k'} .$$

С другой стороны, по законам преобразования получаем

$$A^i_{;l} = A^{i'}_{;l'} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^l} = \left(\frac{\partial A^{i'}}{\partial x^{l'}} + \Gamma^{i'}_{k'l'} A^{k'} \right) \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^l} =$$

$$= \frac{\partial A^{i'}}{\partial x^l} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} + \Gamma^{i'}_{k'l'} A^{k'} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^l} =$$

$$= \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial}{\partial x^l} \left(A^k \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k} \right) + \Gamma^{i'}_{k'l'} A^k \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^l} =$$

$$= \frac{\partial A^i}{\partial x^l} + \left(\Gamma^{i'}_{k'l'} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^l} + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^k \partial x^l} \right) A^k .$$

Сравнивая это выражение с (2.37), получаем закон преобразования символов Кристоффеля:

$$\Gamma^i_{kl} = \Gamma^{i'}_{k'l'} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^l} + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^k \partial x^l} . \tag{2.38}$$

Символы Кристоффеля преобразуются как тензоры только при аффинном или линейном преобразовании координат, когда $\dfrac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^k \partial x^l} = 0$.

Из символов Кристоффеля можно образовать тензор кручения

$$T^i_{kl} = \Gamma^i_{kl} - \Gamma^i_{lk} . \tag{2.39}$$

Эта разность является тензором третьего ранга. Действительно, в слагаемое $\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^k \partial x^l}$ в выражении (2.39) индексы k и l входят симметрично. Поэтому закон преобразования T^i_{kl} не будет содержать данного слагаемого и, следовательно, T^i_{kl} будет преобразовываться как тензор.

Связность Γ^i_{kl} называется симметричной, если $T^i_{kl} = 0$. В этом случае символы Кристоффеля симметричны по нижним индексам.

Следствие: если существует такая система координат x^i, в которой $\Gamma^{i'}_{k'l'} = 0$, то тензор кручения равен нулю и связность симметричная. Действительно, в другой системе координат в соответствии с (2.38) символы Кристоффеля

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^k \partial x^l}$$

симметричны по индексам k и l.

§ 9. Связь символов Кристоффеля с метрическим тензором

Покажем, что ковариантная производная метрического тензора равна нулю. Так как ковариантный дифференциал DA_i является вектором, то

$$DA_i = g_{ik} DA^k . \tag{2.40}$$

Но $A_i = g_{ik} A^k$, так что

$$DA_i = \left(g_{ik} A^k \right) = g_{ik} DA^k + A^k Dg_{ik} .$$

Сравнивая последнее выражение с (2.40), видим, что

$$g_{ik} DA^k = g_{ik} DA^k + A^k Dg_{ik} .$$

Поскольку A^k - любой вектор, то

$$Dg_{ik} = 0 ; \quad g_{ik;l} = 0 . \tag{2.41}$$

Таким образом, при ковариантном дифференцировании метрический тензор g_{ik} является константой. Воспользуемся этим примечательным фактом.

По определению, ковариантная производная ковариантного тензора равна

$$g_{ik;l} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - \Gamma^m_{il} g_{mk} - \Gamma^m_{kl} g_{im} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - \Gamma_{k;il} - \Gamma_{i;kl} .$$

Требование (2.41) позволяет получить уравнению

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} = \Gamma_{k;il} + \Gamma_{i;kl} . \qquad (2.42)$$

Преобразуем (2.42), циклически переставляя индексы:

$$\frac{\partial g_{li}}{\partial x^k} = \Gamma_{i;lk} + \Gamma_{l;ik} , \qquad (2.43)$$

$$-\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} = -\Gamma_{l;ki} - \Gamma_{k;li} . \qquad (2.44)$$

Сложим выражения (2.42) - (2.44):

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} = \Gamma_{i;lk} + \Gamma_{l;ik} + \Gamma_{k;il} + \Gamma_{i;kl} - \Gamma_{l;ki} - \Gamma_{k;li} .$$

Учитывая, что $\Gamma_{i;kl} = \Gamma_{i;lk}$, получим, что

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} = 2\Gamma_{i;kl} ,$$

или

$$\Gamma_{i;kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} \right) . \qquad (2.45)$$

Для символа $\Gamma^i_{kl} = g^{im}\Gamma_{m,kl}$ получим выражение

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{g^{im}}{2}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right). \qquad (2.46)$$

Таким образом, мы нашли способ вычисления символов Кристоффеля, используя компоненты метрического тензора.

§ 10. Тензор кривизны

В специальной теории относительности движение свободной материальной точки определяется принципом наименьшего действия.

Частица движется так, что ее мировая линия экстремальна между заданными мировыми точками. В плоском пространстве-времени такие линии экстремальной длины (геодезические линии) являются прямыми.

Движение частицы в гравитационном поле должно подчиняться тому же принципу, так как гравитационное поле описывается метрикой пространства-времени. Таким образом, в гравитационном поле мировая точка объекта перемещается по геодезической в криволинейном пространстве-времени. В плоском пространстве-времени при движении свободной частицы (частица движется по инерции) ее 4-скорость не меняется вдоль геодезической, т.е. $du^i = 0$. В искривленном пространстве-времени частица также движется свободно, по инерции, но теперь $Du^i = 0$.

При движении частицы вектор ее 4-скорости направлен по касательной к геодезической. Тогда для любого вектора A^i, касательного к геодезической при его перемещении вдоль геодезической будет характерно $DA^i = 0$.

Вернемся к понятию параллельного переноса вектора. При параллельном переносе вектора по геодезической линии его составляющие неизменны (вектор касательной переносится параллельно себе, угол между двумя векторами неизменен). В криволинейном пространстве при параллельном переносе вектора по разным путям получается различный результат. Так, после параллельного переноса вектора по замкнутому контуру его компоненты не будут иметь исходные значения. На рис. 7 показано, как меняется вектор при параллельном переносе по геодезическим в двухмерном искривленном пространстве.

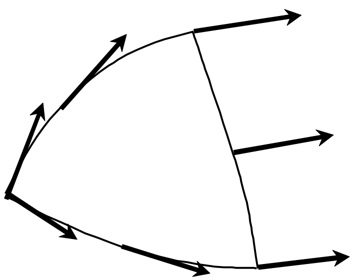

Рис. 7. Параллельный перенос вектора по замкнутому контуру

Выведем формулу, определяющую изменение вектора при его параллельном переносе вдоль малого (в пределе бесконечно малого) замкнутого контура. Если при переносе вектора A_k на dx^l он изменяется на δA_k, то после обхода по контуру его изменение будет таково:

$$\Delta A_k = \oint \Gamma^i_{kl} A_i dx^l . \tag{2.47}$$

Будем считать, что контур образован отрезками геодезических. Применим теперь к интегралу четырехмерную теорему Стокса, преобразуя его к интегралу по поверхности. Воспользуемся теоремой о среднем, учитывая, что замкнутый контур ограничивает малую площадку.

$$\Delta A_k = \frac{1}{2}\Delta f^{lm}\left[\frac{\partial}{\partial x^l}\left(\Gamma^i_{km}A_i\right)-\frac{\partial}{\partial x^m}\left(\Gamma^i_{kl}A_i\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial\Gamma^i_{km}}{\partial x^l}A_i-\frac{\partial\Gamma^i_{kl}}{\partial x^m}A_i+\frac{\partial A_i}{\partial x^l}\Gamma^i_{km}-\frac{\partial A_i}{\partial x^m}\Gamma^i_{kl}\right]\Delta f^{lm}.$$

Все производные, входящие в это выражение, вычисляются в некоторой внутренней точке площадки, за исключением производных $\partial A_i/\partial x^l$ и $\partial A_i/\partial x^m$, значения которых примем равными значениям на контуре. При параллельном переносе вектора по геодезической $DA_i = 0$ и, следовательно,

$$\frac{\partial A_i}{\partial x^l}=\Gamma^n_{il}A_n;\qquad \frac{\partial A_i}{\partial x^m}=\Gamma^n_{im}A_n.$$

Тогда приращение вектора после переноса его по замкнутому контуру имеет вид:

$$\Delta A_k = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial\Gamma^i_{km}}{\partial x^l}A_i-\frac{\partial\Gamma^i_{kl}}{\partial x^m}A_i+\Gamma^i_{km}\Gamma^n_{il}A_n-\Gamma^i_{kl}\Gamma^n_{im}A_n\right]\Delta f^{lm}.$$

Заменив в последних двух слагаемых немые индексы $i \leftrightarrow n$, получим

$$\Delta A_k = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial\Gamma^i_{km}}{\partial x^l}-\frac{\partial\Gamma^i_{kl}}{\partial x^m}+\Gamma^n_{km}\Gamma^i_{nl}-\Gamma^n_{kl}\Gamma^i_{nm}\right]A_i\Delta f^{lm},$$

или

$$\Delta A_k = \frac{1}{2}R^i_{klm}A_i\Delta f^{lm}, \qquad (2.48)$$

где

$$R^i_{klm}=\frac{\partial\Gamma^i_{km}}{\partial x^l}-\frac{\partial\Gamma^i_{kl}}{\partial x^m}+\Gamma^n_{km}\Gamma^i_{nl}-\Gamma^n_{kl}\Gamma^i_{nm}. \qquad (2.49)$$

Величина ΔA_k является вектором (так как это разность векторов в одной точке), A_i - вектор, Δf^{lm} – тензор. Поэтому R^i_{klm} является тензором, который называется тензором Римана (или тензором кривизны). Тензор Римана содержит всю информацию о искривленности пространства.

Чтобы получить выражение для приращения при подобном переносе контравариантного вектора A^k, учтем, что при параллельном переносе скаляр не изменяется $\Delta\left(A^k B_k\right) = 0$. Отсюда

$$\Delta\left(A^k B_k\right) = \Delta A^k \cdot B_k + A^k \cdot \Delta B_k = \Delta A^k \cdot B_k + A^k \cdot \frac{1}{2} R^i_{klm} B_i \Delta f^{lm}.$$

Заменив в последнем слагаемом индексы $i \leftrightarrow k$, получим

$$\Delta A^k = -\frac{1}{2} R^k_{ilm} A^i \Delta f^{lm}. \tag{2.50}$$

В плоском пространстве-времени, очевидно, $R^i_{klm} = 0$, так как $\Gamma^i_{kl} = 0$. Но тогда в любой системе координат $R^i_{klm} = 0$ (при параллельном переносе по замкнутому контуру вектор не меняется). Действует и обратное правило, если в некоторой системе отсчета $R^i_{klm} = 0$, то пространство-время плоское. Действительно, можно выбрать локально-галилееву систему координат и, последовательно выполняя операцию параллельного переноса, построить галилееву систему отсчета во всем пространстве-времени. Таким образом, равенство или неравенство нулю тензора кривизны определяет отсутствие или присутствие гравитации. В локально-геодезической системе координат в криволинейном пространстве $\Gamma^i_{kl} = 0$, но производные символов Кристоффеля по координатам не равны нулю.

Ковариантные производные не коммутируют. Так, для вектора

$$A_{i;k;l} - A_{i;l;k} = A_m R^m_{ikl}, \qquad A^i_{;k;l} - A^i_{;l;k} = -A^m R^i_{mkl}, \tag{2.51}$$

или для тензора

$$A_{ik;l;m} - A_{ik;m;l} = A_{in} R^n_{klm} + A_{nk} R^n_{ilm}. \tag{2.52}$$

Задача 3.5. Доказать справедливость соотношений (2.51).

Решение. Вычислим ковариантные производные в локально-геодезической системе отсчета, в которой символы Кристоффеля равны нулю.

$$A_{i;k} = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} - \Gamma^m_{ik} A_m = T_{ik} ,$$

$$T_{ik;l} = A_{i;k;l} = \frac{\partial T_{ik}}{\partial x^l} - \Gamma^n_{il} T_{mk} - \Gamma^n_{kl} T_{in} = \frac{\partial^2 A_i}{\partial x^k \partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^m_{ik}}{\partial x^l} A_m .$$

Чтобы найти производную $A_{i;l;k}$, заменим индексы $l \leftrightarrow k$:

$$A_{i;l;k} = \frac{\partial^2 A_i}{\partial x^l \partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^m_{il}}{\partial x^k} A_m .$$

Тогда разность производных

$$A_{i;k;l} - A_{i;l;k} = \left(\frac{\partial \Gamma^m_{il}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^m_{ik}}{\partial x^l} \right) A_m .$$

В локально-инерциальной системе отсчета $R^m_{ikl} = \dfrac{\partial \Gamma^m_{il}}{\partial x^k} - \dfrac{\partial \Gamma^m_{ik}}{\partial x^l}$. Справедливость первого соотношения в (2.51) доказана. Равенства (2.51) являются тензорными равенствами, а поэтому они выполняются в любой системе отсчета, если справедливы хотя бы в какой-нибудь одной.

§ 11. Свойства тензора кривизны

Для анализа свойств симметрии тензора Римана запишем его в полностью ковариантной форме

$$R_{iklm} = g_{in} R^n_{klm} .$$

Покажем, что выражение для ковариантного тензора кривизны можно записать в виде

$$R_{iklm} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^i \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^k \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{km}}{\partial x^i \partial x^l} \right) + \qquad (2.53)$$

$$+ g_{np} \left(\Gamma^n_{kl} \Gamma^p_{im} - \Gamma^n_{km} \Gamma^p_{il} \right).$$

Ковариантный тензор Римана имеет вид:

$$R_{iklm} = g_{in}\frac{\partial \Gamma^n_{km}}{\partial x^l} - g_{in}\frac{\partial \Gamma^n_{kl}}{\partial x^m} + g_{in}\Gamma^n_{pl}\Gamma^p_{km} - g_{in}\Gamma^i_{pm}\Gamma^p_{kl}.$$

Преобразуем два первых слагаемых:

$$g_{in}\frac{\partial \Gamma^n_{km}}{\partial x^l} = \frac{\partial g_{in}\Gamma^n_{km}}{\partial x^l} - \Gamma^n_{km}\frac{\partial g_{in}}{\partial x^l} = \frac{\partial \Gamma_{i,km}}{\partial x^l} - \Gamma^n_{km}\frac{\partial g_{in}}{\partial x^l},$$

$$g_{in}\frac{\partial \Gamma^n_{kl}}{\partial x^m} = \frac{\partial g_{in}\Gamma^n_{kl}}{\partial x^m} - \Gamma^n_{kl}\frac{\partial g_{in}}{\partial x^m} = \frac{\partial \Gamma_{i,kl}}{\partial x^m} - \Gamma^n_{kl}\frac{\partial g_{in}}{\partial x^m}.$$

Тогда

$$R_{iklm} = \frac{\partial \Gamma_{i,km}}{\partial x^l} - \Gamma^n_{km}\frac{\partial g_{in}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{i,kl}}{\partial x^m} + \Gamma^n_{kl}\frac{\partial g_{in}}{\partial x^m} + g_{in}\Gamma^n_{pl}\Gamma^p_{km} - g_{in}\Gamma^i_{pm}\Gamma^p_{kl} =$$

$$= \frac{\partial \Gamma_{i,km}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{i,kl}}{\partial x^m} + \left(\Gamma_{i,nl} - \frac{\partial g_{in}}{\partial x^l}\right)\Gamma^n_{km} - \left(\Gamma_{i,nm} - \frac{\partial g_{in}}{\partial x^m}\right)\Gamma^n_{kl}.$$

Учитывая равенство (2.45), можно получить

$$\Gamma_{i;nl} - \frac{\partial g_{in}}{\partial x^l} = \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial g_{in}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^n} - \frac{\partial g_{nl}}{\partial x^i}\right) =$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{nl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{in}}{\partial x^l} - \frac{\partial g_{li}}{\partial x^n}\right) = -\Gamma_{n;li}.$$

Подставляя в приведенное равенство выражения для производных символов Кристоффеля, получим

$$R_{iklm} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^m \partial x^l} + \frac{\partial^2 g_{mi}}{\partial x^k \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{km}}{\partial x^i \partial x^l}\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^l \partial x^m} + \frac{\partial^2 g_{li}}{\partial x^k \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^i \partial x^m}\right) - \Gamma_{n,li}\Gamma^n_{km} + \Gamma_{n,mi}\Gamma^n_{kl} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^i \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^k \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{km}}{\partial x^i \partial x^l}\right) + g_{np}\left(\Gamma^n_{il}\Gamma^p_{im} - \Gamma^n_{im}\Gamma^p_{kl}\right),$$

что и требовалось доказать.

Выражение (2.53) позволяет убедиться в том, что существуют следующие свойства тензора кривизны:

1. Тензор антисимметричен по каждой паре индексов

$$R_{iklm} = -R_{kilm} = R_{kiml}\,. \tag{2.54}$$

Тогда $R_{iilm} = 0$.

2. Тензор симметричен по перестановке пар индексов

$$R_{iklm} = R_{lmik}\,. \tag{2.55}$$

3. Сумма трех тензоров с циклической перестановкой любых трех индексов равна нулю

$$R_{iklm} + R_{imkl} + R_{ilmk} = 0\,. \tag{2.56}$$

4. Существует тождество Бианки

$$R^{n}_{ikl;m} + R^{n}_{imk;l} + R^{n}_{ilm;k} = 0\,. \tag{2.57}$$

Докажем это тождество, перейдя к локально-галилеевой системе отсчета:

$$R^{i}_{klm} = \frac{\partial \Gamma^{i}_{km}}{\partial x^{l}} - \frac{\partial \Gamma^{i}_{kl}}{\partial x^{m}} + \Gamma^{i}_{nl}\Gamma^{n}_{km} - \Gamma^{i}_{nm}\Gamma^{n}_{kl}\,,$$

$$R^{n}_{ikl} = \frac{\partial \Gamma^{n}_{il}}{\partial x^{k}} - \frac{\partial \Gamma^{n}_{ik}}{\partial x^{l}} + \Gamma^{n}_{pk}\Gamma^{p}_{il} - \Gamma^{n}_{pl}\Gamma^{p}_{ik}\,.$$

В локально-галилеевой системе координат $\Gamma^{i}_{kl} = 0$, тогда

$$R^{n}_{ikl;m} = \frac{\partial^2 \Gamma^{n}_{il}}{\partial x^{k}\partial x^{m}} - \frac{\partial^2 \Gamma^{n}_{ik}}{\partial x^{l}\partial x^{m}}\,,$$

$$R^{n}_{imk;l} = \frac{\partial^2 \Gamma^{n}_{ik}}{\partial x^{m}\partial x^{l}} - \frac{\partial^2 \Gamma^{n}_{im}}{\partial x^{k}\partial x^{l}}\,,$$

$$R^{n}_{ilm;k} = \frac{\partial^2 \Gamma^{n}_{im}}{\partial x^{l}\partial x^{k}} - \frac{\partial^2 \Gamma^{n}_{il}}{\partial x^{m}\partial x^{k}}\,.$$

Просуммировав полученные выражения, получим тождество (2.57).

Упрощением тензора Римана можно получить тензор второго ранга. Упрощение R_{iklm} по индексам i и k или по индексам l и m дает нулевой результат из-за антисимметричности тензора, а упрощение по любым другим парам с точностью до знака дает один результат.

Определим тензор Риччи так:

$$R_{ik} = g^{lm} R_{limk} = R^l_{ilk} . \qquad (2.58)$$

В литературе встречается и другое определение, отличающееся от (2.58) знаком:

$$R_{ik} = g^{lm} R_{likm} = R^l_{ikl} .$$

Согласно (2.58) для тензора Риччи имеем выражение

$$R_{ik} = \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^l_{il}}{\partial x^k} + \Gamma^m_{lm}\Gamma^l_{ik} - \Gamma^l_{mk}\Gamma^m_{il} . \qquad (2.59)$$

Тензор Риччи симметричен по индексам $R_{ik} = R_{ki}$. В результате упрощения тензора Риччи:

$$R = g^{ik} R_{ik} = g^{il} g^{km} R_{iklm} \qquad (2.60)$$

получим величину, которая называется скалярной кривизной.

В дальнейшем нам потребуется упрощенное тождество Бианки, которое приводим здесь без доказательства:

$$R^l_{m;l} = \frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial x^m} . \qquad (2.61)$$

Упражнение 2.6. Доказать равенство (2.61).

Глава 3. УРАВНЕНИЯ ПОЛЯ

§ 1. Вспомогательные формулы

Для вывода уравнений поля потребуются некоторые вспомогательные формулы.

При переходе от одной галилеевой системы координат к другой величина $d\Omega' = dx'^0 dx'^1 dx'^2 dx'^3$ ведет себя как скаляр (инвариантна). При переходе к криволинейной системе координат элементарный 4-объем должен измениться:

$$d\Omega' \to \frac{1}{J} d\Omega .$$

Здесь J – якобиан преобразования от галилеевых координат к криволинейным:

$$J = \frac{\partial\left(x^0, x^1, x^2, x^3\right)}{\partial\left(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3\right)}$$

– определитель, составленный из производных $\partial x^i / \partial x'^k$. Вычислим этот определитель. Для этого воспользуемся преобразованием метрического тензора при переходе от галилеевых координат к криволинейным:

$$g^{ik} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^l} \frac{\partial x^k}{\partial x'^m} g'^{lm} . \qquad (3.1)$$

Определитель $\left|g_{ik}\right| = g$ называется фундаментальным определителем. Вычислим определитель контравариантного метрического тензора

$$\left|g^{ik}\right| = \left|\frac{\partial x^i}{\partial x'^l}\right| \cdot \left|\frac{\partial x^k}{\partial x'^m}\right| \cdot \left|g'^{lm}\right| ,$$

причем $\left|g'^{lm}\right| = -1$, так как «штрихованная» система координат галилеева. Тогда получаем

$$J = \frac{1}{\sqrt{-g}} .$$

Таким образом, при переходе от галилеевой системы к произвольной элемент 4-мерного объема преобразуется по правилу

$$d\Omega' \to \sqrt{-g}\, d\Omega ,$$

величина $\sqrt{-g}\, d\Omega$ инвариантна при преобразовании координат.

Найдем дифференциал фундаментального определителя dg. Для этого необходимо взять дифференциал от компонент метрического тензора g_{ik} и умножить на соответствующий минор. Но компоненты g^{ik} (компоненты обратного тензора) есть миноры определителя $g = |g_{ik}|$, деленные на фундаментальный определитель. Поэтому миноры определителя g равны gg_{ik}. Тогда

$$dg = gg_{ik}dg_{ik} = -gg_{ik}dg^{ik} . \tag{3.2}$$

Запишем выражение для символа Кристоффеля с совпадающими верхним и нижним индексами. Так как

$$d\left(g_{ik}g^{ik}\right) = d\left(\delta_i'\right) = 0 ,$$

то

$$dg_{ik} \cdot g^{ik} + g_{ik} \cdot dg^{ik} = 0 .$$

Следовательно,

$$\Gamma^i_{ki} = \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^m} \right) = \frac{1}{2} g^{im} \frac{\partial g_{im}}{\partial x^k} ,$$

или

$$\Gamma^i_{ki} = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^k} = \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^k} . \tag{3.3}$$

Получим выражение для 4-мерной дивергенции вектора в криволинейных координатах:

$$A^i_{;i}=\frac{\partial A^i}{\partial x^i}+\Gamma^i_{li}A^l=\frac{\partial A^i}{\partial x^i}+A^l\,\frac{\partial\ln\sqrt{-g}}{\partial x^k}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\left(\sqrt{-g}A^i\right)}{\partial x^i}.\qquad(3.4)$$

Пусть есть антисимметричный тензор A^{ik}. Для него, как для любого тензора,

$$A^{ik}_{;l}=\frac{\partial A^{ik}}{\partial x^l}+\Gamma^i_{ml}A^{mk}+\Gamma^k_{ml}A^{im}.$$

Тогда

$$A^{ik}_{;k}=\frac{\partial A^{ik}}{\partial x^k}+\Gamma^i_{mk}A^{mk}+\Gamma^k_{mk}A^{im}.$$

Переобозначим немые индексы $k\leftrightarrow m$ во втором слагаемом, затем их переставим. Вследствие антисимметричности тензора получим $\Gamma^i_{mk}A^{mk}=-\Gamma^i_{mk}A^{mk}$, следовательно, $\Gamma^i_{mk}A^{mk}=0$. Значит, для антисимметричного тензора

$$A^{ik}_{;k}=\frac{\partial A^{ik}}{\partial x^k}+\Gamma^k_{mk}A^{im}=\frac{\partial A^{ik}}{\partial x^k}+A^{im}\,\frac{\partial\ln\sqrt{-g}}{\partial x^m},$$

или

$$A^{ik}_{;k}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\ln\left(\sqrt{-g}A^{ik}\right)}{\partial x^k},\qquad(3.5)$$

$$A^{ik}_{;k}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\ln\left(\sqrt{-g}A^{ik}\right)}{\partial x^k}.\qquad(3.6)$$

§ 2. Действие для гравитационного поля

Для нахождения уравнений, определяющих гравитационное поле, необходимо определить действие S_g для поля, действие S_m для материи, а затем потребовать равенства нулю вариации суммарного действия $\delta\left(S_g+S_m\right)=0$.

В специальной теории относительности и в галилеевых координатах уравнение движения материального объекта можно определить из принципа наименьшего действия, причем четырехмерный вектор импульса равен

$$p_i = -\frac{\partial S}{\partial x^i},$$

а четырехмерная сила

$$g^i = \frac{dp^i}{ds}.$$

Отсюда следует, что действие – это скаляр. Так, для электромагнитного поля $S \sim \int F_{ik}F^{ik}d\Omega$, где F_{ik} - тензор электромагнитного поля.

Действие для гравитационного поля нужно представить в виде некоторого интеграла от скаляра по четырехмерному объему, т.е.

$$S_g \sim \int G\sqrt{-g}d\Omega,$$

где G - некоторый скаляр, играющий роль «потенциала».

По аналогии со специальной теорией относительности будем исходить из того, что уравнения поля должны содержать производные от потенциала не выше второго порядка. Так как уравнения получаются варьированием действия (дифференцированием), то необходимо, чтобы скаляр G содержал производные от g_{ik} не выше первого порядка. Таким образом, G нужно составить из компонент метрического тензора g_{ik} и его производных, например, из символов Кристоффеля Γ^i_{kl}.

Из g_{ik} и Γ^i_{kl} нельзя построить скаляр (выбрав галилееву систему координат, обратим Γ^i_{kl} в нуль). Но существует такая величина, как скалярная кривизна R, содержащая g_{ik} и первые и вторые производные, при этом вторые производные входят в выражение для R линейно. Именно из-за линейности вхождения вторых производных их присутствие не является опасным, то есть действие для гравитационного поля можно представить в виде

$$S_g \sim \int R\sqrt{-g}d\Omega.$$

Убедимся в том, что присутствие вторых производных в выражении для скалярной кривизны не будет препятствовать достижению наших целей:

$$\sqrt{-g}R = \sqrt{-g}g^{ik}R_{ik} = \sqrt{-g}\left[g^{ik}\frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^l} - g^{ik}\frac{\partial \Gamma^l_{il}}{\partial x^k} + g^{ik}\Gamma^m_{lm}\Gamma^l_{ik} - g^{ik}\Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km} \right],$$

в первом слагаемом внесем $\sqrt{-g}$ и g^{ik} под знак производной:

$$\sqrt{-g}g^{ik}\frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^l} = \frac{\partial}{\partial x^l}\left(\sqrt{-g}g^{ik}\Gamma^l_{ik}\right) - \Gamma^l_{ik}\frac{\partial}{\partial x^l}\left(\sqrt{-g}g^{ik}\right).$$

Первое слагаемое в этом выражении содержит вторую производную от метрического тензора. Тогда выражение для действия можно разбить на два слагаемых:

$$\int R\sqrt{-g}d\Omega = \int G\sqrt{-g}d\Omega + A,$$

в первое из них входят производные от метрического тензора не выше первого порядка, а во второе – производные второго порядка. Интеграл A можно записать в виде

$$\int \frac{\partial}{\partial x^l}\left(\sqrt{-g}w^l\right)d\Omega,$$

он содержит четырехмерную дивергенцию некоторой величины w^l. Учитывая выражение (3.4) и используя теорему Гаусса, этот интеграл можно преобразовать в интеграл по гиперповерхности, охватывающей четырехмерный объем. Далее действие нужно варьировать. При варьировании это слагаемое исчезнет, так как на границах объема вариация равна нулю. Поэтому

$$\delta\int R\sqrt{-g}d\Omega = \delta\int G\sqrt{-g}d\Omega.$$

Продолжая преобразования величины $\sqrt{-g}R$, можно показать, что

$$G = g^{ik}\left[\Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km} - \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm}\right]. \tag{3.7}$$

Такая величина пригодна для формирования действия. Положим

$$S_g = -\frac{c^3}{16\pi\gamma}\int G\sqrt{-g}d\Omega = -\frac{c^3}{16\pi\gamma}\int R\sqrt{-g}d\Omega. \tag{3.8}$$

Здесь γ – гравитационная постоянная, а коэффициенты выбраны так, чтобы в нерелятивистском пределе выполнялся закон всемирного тяготения Ньютона.

Вычислим вариацию действия (3.8), коэффициент перед интегралом для краткости не записываем:

$$\delta\int R\sqrt{-g}d\Omega=\delta\int g^{ik}R_{ik}\sqrt{-g}d\Omega=$$

$$=\int\left(R_{ik}\sqrt{-g}\delta g^{ik}+R_{ik}g^{ik}\delta\sqrt{-g}+g^{ik}\sqrt{-g}\delta R_{ik}\right)d\Omega\,.$$

Вариация $\delta\sqrt{-g}=-\dfrac{1}{2\sqrt{-g}}\delta g$. Учтем, что $\delta g=-gg_{ik}\delta g^{ik}$ (3.2). Тогда

$$\delta\sqrt{-g}=\frac{1}{2\sqrt{-g}}gg_{ik}\delta g^{ik}=-\frac{\sqrt{-g}}{2}g_{ik}\delta g^{ik}\,.$$

Таким образом, для вариации действия получаем

$$\delta\int R\sqrt{-g}d\Omega=\int\left(R_{ik}-\frac{1}{2}Rg_{ik}\right)\sqrt{-g}\delta g^{ik}d\Omega+\int g^{ik}\sqrt{-g}\delta R_{ik}d\Omega\,.$$

Преобразуем второй интеграл. Вычислим вариацию тензора Риччи δR_{ik} в локально-геодезической системе координат, в которой $\Gamma^i_{kl}=0$. В такой системе координат $R_{ik}=\dfrac{\partial\Gamma^l_{ik}}{\partial x^l}-\dfrac{\partial\Gamma^l_{il}}{\partial x^k}$ и, следовательно,

$$g^{ik}\delta R_{ik}=g^{ik}\left(\delta\frac{\partial\Gamma^l_{ik}}{\partial x^l}-\delta\frac{\partial\Gamma^l_{il}}{\partial x^k}\right)=g^{ik}\frac{\partial}{\partial x^l}\delta\Gamma^l_{ik}-g^{il}\frac{\partial}{\partial x^l}\delta\Gamma^k_{ik}\,.$$

В локально-геодезической системе отсчета $\partial g^{ik}/\partial x^l$, тогда $g^{ik}_{;l}=0$; g^{ik} – константа. Поэтому $g^{ik}\delta R_{ik}=\partial w^l/\partial x^l$, где

$$w^l=g^{ik}\delta\Gamma^l_{ik}-g^{il}\delta\Gamma^k_{ik}\,. \tag{3.9}$$

Здесь w^l - вектор, так как $\delta\Gamma^l_{ik}$ – тензор. Действительно, легко убедиться, вариация символа Кристоффеля является тензором, несмотря на то, что символы Кристоффеля тензорами не являются. Тогда и в произвольной системе координат

$$g^{ik}\delta R_{ik}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^l}\left(\sqrt{-g}w^l\right),$$

поскольку в локально-геодезической системе координат $\frac{\partial w^l}{\partial x^l} = w^l_{;l}$, а дивергенция вектора вычисляется по формуле (3.4).

Тогда

$$\int g^{ik}\sqrt{-g}\,\delta R_{ik}\,d\Omega = \int \frac{\partial}{\partial x^l}\left(\sqrt{-g}\,w^l\right)d\Omega = \int w^l_{;l}\sqrt{-g}\,d\Omega = \oint w^l\sqrt{-g}\,dS_l = 0\,.$$

На границе гиперповерхности, охватывающей 4-мерный объем, 4-мерный вектор w^l равен нулю в силу равенства нулю вариаций символов Кристоффеля (3.9). Таким образом, вариация действия для гравитационного поля имеет вид

$$\delta S_g = -\frac{c^3}{16\pi\gamma}\int\left(R_{ik} - \frac{1}{2}Rg_{ik}\right)\delta g^{ik}\sqrt{-g}\,d\Omega\,. \qquad (3.10)$$

§ 3. Действие для материи

Аналогично тому, как мы поступали в случае плоского пространства-времени (см. § 10, глава 1), действие для материи в криволинейных координатах запишем в виде

$$S_m = \frac{1}{c}\int \Lambda\sqrt{-g}\,d\Omega\,, \qquad (3.11)$$

где Λ - плотность функции Лагранжа.

Плотность функции Лагранжа Λ системы зависит от величин, определяющих состояние системы, и их производных по координатам и времени (q и $\partial q/\partial x^i$). В нашем случае это компоненты метрического тензора (потенциалы гравитационного поля).

Тогда вариация действия (3.11) будет определена так:

$$\delta S_m = \frac{1}{c}\delta\int \Lambda\sqrt{-g}\,d\Omega = \frac{1}{c}\int\left[\frac{\partial\sqrt{-g}\Lambda}{\partial g^{ik}}\delta g^{ik} + \frac{\partial\sqrt{-g}\Lambda}{\partial\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}}\delta\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}\right]d\Omega =$$

$$=\frac{1}{c}\int\left[\frac{\partial\sqrt{-g}\Lambda}{\partial g^{ik}}\delta g^{ik}+\frac{\partial\sqrt{-g}\Lambda}{\partial\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^{l}}}\frac{\partial}{\partial x^{l}}\delta g^{ik}\right]d\Omega=$$

$$\frac{1}{c}\int\left[\frac{\partial\sqrt{-g}\Lambda}{\partial g^{ik}}\delta g^{ik}+\frac{\partial}{\partial x^{l}}\left(\frac{\partial\sqrt{-g}\Lambda}{\partial\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^{l}}}\delta g^{ik}\right)-\delta g^{ik}\frac{\partial}{\partial x^{l}}\frac{\partial\sqrt{-g}\Lambda}{\partial\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^{l}}}\right]d\Omega.$$

В соответствии с теоремой Гаусса интеграл от второго слагаемого равен нулю и

$$\delta S_{m}=\frac{1}{c}\int\left[\frac{\partial\sqrt{-g}\Lambda}{\partial g^{ik}}-\frac{\partial}{\partial x^{l}}\frac{\partial\sqrt{-g}\Lambda}{\partial\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^{l}}}\right]\delta g^{ik}d\Omega.$$

Обозначим

$$\frac{1}{2}\sqrt{-g}T_{ik}=\frac{\partial\sqrt{-g}\Lambda}{\partial g^{ik}}-\frac{\partial}{\partial x^{l}}\frac{\partial\sqrt{-g}\Lambda}{\partial\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^{l}}}. \qquad (3.12)$$

Таким образом, вариация действия для материи представима в виде

$$\delta S_{m}=\frac{1}{2c}\int T_{ik}\delta g^{ik}\sqrt{-g}d\Omega. \qquad (3.13)$$

Величина T_{ik} связана с плотностью функции Лагранжа, является симметричным тензором. Если ее 4-дивергенция равна нулю, то тензор T_{ik} должен быть отождествлен с тензором энергии-импульса материи. Убедимся, что

$$T_{i;k}^{k}=0.$$

Выполним в выражении (3.11) преобразование координат от x^{i} к x'^{i} по правилу

$$x'^{i}=x^{i}+\xi^{i}, \qquad (3.14)$$

где ξ^i – малые величины. При этом преобразовании метрический тензор изменится. В новых координатах

$$g'^{ik}\left(x'^l\right) = g^{lm}\left(x^l\right)\frac{\partial x'^i}{\partial x^l}\frac{\partial x'^k}{\partial x^m} = g^{lm}\left(\frac{\partial x^i}{\partial x^l} + \frac{\partial \xi^i}{\partial x^l}\right)\left(\frac{\partial x^k}{\partial x^m} + \frac{\partial \xi^k}{\partial x^m}\right) =$$

$$= g^{lm}\left(\delta_l^i + \frac{\partial \xi^i}{\partial x^l}\right)\left(\delta_m^k + \frac{\partial \xi^k}{\partial x^m}\right) = g^{lm}\delta_l^i\delta_m^k + g^{lm}\delta_m^k\frac{\partial \xi^i}{\partial x^l} + g^{lm}\delta_l^i\frac{\partial \xi^k}{\partial x^m} =$$

$$= g^{ik}\left(x^l\right) + g^{im}\frac{\partial \xi^k}{\partial x^m} + g^{lk}\frac{\partial \xi^i}{\partial x^l}.$$

С другой стороны, $g'^{ik}\left(x'^l\right) = g'^{ik}\left(x^l + \xi^l\right)$. Это выражение разложим в ряд по степеням ξ^l, пренебрегая слагаемыми, содержащими степени ξ^i выше первой:

$$g'^{ik}\left(x^l + \xi^l\right) \approx g'^{ik}\left(x^l\right) + \frac{\partial g'^{ik}}{\partial x^l}\xi^l.$$

В последнем слагаемом производные $\partial g'^{ik}/\partial x^l$ можно заменить на $\partial g^{ik}/\partial x^l$:

$$g'^{ik}\left(x^l\right) = -\frac{\partial g'^{ik}}{\partial x^l}\xi^l + g^{ik}\left(x^l\right) + g^{im}\frac{\partial \xi^k}{\partial x^m} + g^{lk}\frac{\partial \xi^i}{\partial x^l},$$

или

$$g'^{ik}\left(x^l\right) = g^{ik}\left(x^l\right) - \xi^l\frac{\partial g'^{ik}}{\partial x^l} + g^{il}\frac{\partial \xi^k}{\partial x^l} + g^{kl}\frac{\partial \xi^i}{\partial x^l}. \qquad (3.15)$$

Контравариантная производная вектора ξ^i выглядит следующим образом:

$$\xi^{i;k} = g^{kl}\xi^i_{;l} = g^{kl}\left[\frac{\partial \xi^i}{\partial x^l} + \Gamma^i_{ml}\xi^m\right] = g^{kl}\frac{\partial \xi^i}{\partial x^l} + g^{kl}\Gamma^i_{ml}\xi^m.$$

Тогда

$$\xi^{i;k} + \xi^{k;i} = g^{kl}\frac{\partial \xi^i}{\partial x^l} + g^{il}\frac{\partial \xi^k}{\partial x^l} + g^{kl}\Gamma^i_{ml}\xi^m + g^{il}\Gamma^k_{ml}\xi^m . \qquad (3.16)$$

Учитывая тот факт, что при ковариантном дифференцировании метрический тензор является константой

$$g^{ik}_{;l} = \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} + \Gamma^i_{ml}g^{mk} + \Gamma^k_{ml}g^{im} = 0 ,$$

преобразуем два последних слагаемых в (3.16):

$$\xi^{i;k} + \xi^{k;i} = -\xi^l\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} + g^{kl}\frac{\partial \xi^i}{\partial x^l} + g^{il}\frac{\partial \xi^k}{\partial x^l} .$$

С учетом этого выражение (3.15) переписывается следующим образом:

$$g'^{ik} = g^{ik} + \delta g^{ik} ,$$

$$\delta g^{ik} = \xi^{i;k} + \xi^{k;i} .$$

Действие S_m является 4-мерным скаляром и при преобразовании координат не меняется, т.е. $\delta S_m = 0$ при преобразовании координат. С другой стороны, при преобразовании координат изменяется метрический тензор g_{ik}, что должно привести к изменению действия:

$$\delta S_m = \frac{1}{2c}\int T_{ik}\delta g^{ik}\sqrt{-g}d\Omega = \frac{1}{2c}\int T_{ik}\left(\xi^{i;k} + \xi^{k;i}\right)\sqrt{-g}d\Omega =$$

$$= \frac{1}{2c}\int\left[T_{ik}\xi^{i;k} + T_{ik}\xi^{k;i}\right]\sqrt{-g}d\Omega .$$

В слагаемом $T_{ik}\xi^{k;i}$ произведем замену немых индексов $i \leftrightarrow k$, а затем учтем свойство симметрии $T_{ik} = T_{ki}$. Тогда

$$\delta S_m = \frac{1}{c}\int T_{ik}\xi^{i;k}\sqrt{-g}d\Omega .$$

Преобразуем это выражение с учетом того, что $\xi^{i;k} = g^{kl}\xi^i_{;l}$:

$$T_{ik}\xi^{i;k} = T_{ik}g^{kl}\xi^i_{;l} = T^l_i\xi^i_{;l} ;$$

$$\delta S_m = \frac{1}{c}\int T^l_i\xi^i_{;l}\sqrt{-g}d\Omega = \frac{1}{c}\int\left(T^l_i\xi^i\right)_{;l}\sqrt{-g}d\Omega - \frac{1}{c}\int\xi^i T^l_{i;l}\sqrt{-g}d\Omega .$$

Первый интеграл преобразуем по теореме Гаусса в интеграл по гиперповерхности, ограничивающей 4-мерный объем. На этой гиперповерхности $\xi^i = 0$, следовательно, первый интеграл обращается в нуль.

Как было сказано выше, при преобразовании координат $\delta S_m = 0$, поэтому

$$-\frac{1}{c}\int \xi^i T^l_{i;l}\sqrt{-g}\,d\Omega = 0\,.$$

Поскольку векторы ξ^i есть произвольные малые 4-мерные векторы, то из последнего равенства следует равенство нулю 4-мерной дивергенции тензора T^{ik}. Итак, тензор T^{ik}, определяемый выражением (3.12), есть тензор энергии-импульса материи.

§ 4.Уравнение Эйнштейна

Вариация действия для системы «гравитационное поле и материя» есть сумма выражений (3.10) и (3.13). Требуя равенства ее нулю, приходим к интегральному соотношению

$$-\frac{c^3}{16\pi\gamma}\int\left(R_{ik}-\frac{1}{2}Rg_{ik}-\frac{8\pi\gamma}{c^4}T_{ik}\right)\delta g^{ik}\sqrt{-g}\,d\Omega = 0\,.$$

В силу произвольности вариации метрики δg^{ik}

$$R_{ik}-\frac{1}{2}Rg_{ik}=\frac{8\pi\gamma}{c^4}T_{ik}\,. \tag{3.17}$$

Мы получили уравнения поля Эйнштейна. Уравнения поля можно записать в смешанной форме:

$$R_i^k-\frac{1}{2}\delta_i^k R=\frac{8\pi\gamma}{c^4}T_i^k \tag{3.18}$$

Упрощая (3.17) по индексам i и k, имеем

$$g^{ik}R_{ik}-\frac{1}{2}g^{ik}g_{ik}R=\frac{8\pi\gamma}{c^4}g^{ik}T_{ik}\,,$$

откуда

$$R = -\frac{8\pi\gamma}{c^4} T \ .$$

Поэтому уравнение (3.17) можно записать еще так:

$$R_{ik} = \frac{8\pi\gamma}{c^4}\left(T_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} T \right). \tag{3.19}$$

Уравнения поля являются нелинейными уравнениями, поэтому принцип суперпозиции несправедлив. Заметим, что в пустом пространстве, вне материи, $R_{ik} = 0$ в согласии с (3.19). Равенство нулю тензора Риччи ни в коей мере не свидетельствует об отсутствии гравитационного поля.

В силу тождества Бианки

$$R^l_{m;l} = \frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial x^m} = \frac{1}{2} R_{;m} \ .$$

Поэтому $T^k_{i;k} = 0$. Таким образом, в уравнении поля есть и уравнение $T^k_{i;k} = 0$. Как было показано выше, это приводит к закону сохранения энергии-импульса, содержащему уравнение движения физической системы, к которой тензор относится. Мы приходим к примечательному выводу. Уравнения поля содержат и уравнения движения материи, создающей поле. Движение материи, создающей гравитационное поле, и поле должны определяться совместно.

Уравнения поля должны быть дополнены уравнением состояния – зависимостью давления от плотности вещества и температуры.

§ 5.Закон Ньютона

Рассмотрим предельный случай малых скоростей и полей (слабое отличие g_{ik} от η_{ik}, гравитационный потенциал φ мал по сравнению с c^2).

В нерелятивистской механике движение частиц в гравитационном поле определяется уравнением Лагранжа, при этом функция Лагранжа равна

$$L = \frac{mv^2}{2} - m\varphi \ .$$

Запишем функцию Лагранжа в виде

$$L = -mc^2 + \frac{mv^2}{2} - m\varphi ,$$

добавив константу $-mc^2$ для того, чтобы функция Лагранжа в отсутствии поля совпадала с пределом релятивистской функции $L = -mc^2\sqrt{1-\left(v/c\right)^2}$ при $v/c \to 0$. Тогда

$$S = \int L dt = -mc\int\left(c - \frac{v^2}{2c} + \frac{\varphi}{c}\right)dt .$$

С другой стороны,

$$S = -mc\int ds .$$

Сравнивая полученные выражения, видим, что в предельном случае малых скоростей и слабых полей

$$ds = \left(c - \frac{v^2}{2c} + \frac{\varphi}{c}\right)dt .$$

Возведем полученное выражение в квадрат и опустим слагаемые, которые стремятся к нулю при $c \to \infty$,

$$ds^2 = c^2dt^2 - v^2dt^2 + 2\varphi dt^2 = \left(c^2 + 2\varphi\right)dt^2 - d\vec{r}^{\,2} .$$

Таким образом, в нашем предельном случае

$$g_{00} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2} . \tag{3.20}$$

В специальной теории относительности тензор энергии-импульса сплошной среды определяется так (см. § 11, глава 1):

$$T^{ik} = \left(p+\varepsilon\right)u^iu^k - pg^{ik} ,$$

$$T_i^k = \left(p+\varepsilon\right)u_iu^k - p\delta_i^k .$$

Если скорости всех тел малы по сравнению со скоростью света, то в плотности энергии ε можно опустить все слагаемые и оставить только энергию покоя μ_0c^2. Давление тоже мало, поэтому

$$T_i^k = \mu c^2u_iu^k .$$

Четырехмерная скорость равна

$$u^i = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right).$$

Так как скорость движения нерелятивистской частицы мала, то

$$u_0 = u^0 = 1, \quad u^\alpha = 0 .$$

В этом случае отличной от нуля будет только компонента T_0^0 тензора энергии-импульса; $T_0^0 = \mu c^2$.

Соответствующая компонента уравнения Эйнштейна имеет вид

$$R_0^0 = \frac{8\pi\gamma}{c^4}\left(T_0^0 - \frac{1}{2}\delta_0^0 T \right) = \frac{8\pi\gamma}{c^2}\mu .$$

Тензор Риччи при $i = k = 0$ имеет вид

$$R_{00} = \frac{\partial \Gamma_{00}^l}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{0l}^l}{\partial x^0} + \Gamma_{lm}^m \Gamma_{00}^l - \Gamma_{0m}^l \Gamma_{0l}^m .$$

Последние два слагаемых являются величинами второго порядка малости. Это естественно – слабое поле описывается метрикой, незначительно отличающейся от галилеевой. Производная по $x^0 = ct$ мала по сравнению с производными по пространственным координатам. Таким образом,

$$R_{00} = \frac{\partial \Gamma_{00}^l}{\partial x^l} = \frac{\partial \Gamma_{00}^0}{\partial x^0} + \frac{\partial \Gamma_{00}^\alpha}{\partial x^\alpha} \approx \frac{\partial \Gamma_{00}^\alpha}{\partial x^\alpha} .$$

Из связи символов Кристоффеля с компонентами метрического тензора получаем

$$\Gamma_{00}^\alpha = \frac{g^{\alpha m}}{2}\left(\frac{\partial g_{m0}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0m}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^m} \right) = -\frac{1}{2} g^{\alpha m} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^m} =$$

$$= -\frac{1}{2} g^{\alpha 0} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} - \frac{1}{2} g^{\alpha\alpha} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\alpha} = -\frac{1}{2} g^{\alpha\alpha} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\alpha} .$$

Так как $g^{\alpha\alpha} \approx -1$, а компонента g_{00} определяется выражением (3.20), то

$$\Gamma^{\alpha}_{00} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial x^{\alpha}}.$$

Тогда

$$R_{00} \approx \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{00}}{\partial x^{\alpha}} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^{\alpha 2}},$$

$$R^0_0 = g^{00}R_{00} = R_{00} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^{\alpha 2}} = \frac{1}{c^2}\Delta\varphi .$$

В результате получаем уравнение для гравитационного потенциала в нерелятивистской механике

$$\Delta\varphi = 4\pi\gamma\,\mu . \qquad (3.21)$$

Решение уравнения Пуассона:

$$\varphi = -\gamma\int\frac{\mu dV}{R}.$$

Для материальной точки $\varphi = -\gamma\dfrac{m}{R}$. И, следовательно, сила гравитационного притяжения двух материальных точек есть

$$F = -m'\frac{\partial\varphi}{\partial R}, \qquad F = -\gamma\frac{mm'}{R^2}.$$

Уравнения поля Эйнштейна содержат в нерелятивистском пределе закон всемирного тяготения Ньютона.

§ 6. Движение частицы в гравитационном поле

В соответствии с основной идеей общей теории относительности, вместо движения материальной точки в гравитационном поле мы рассматриваем движении частицы, как движение свободной частицы, движение по инерции в искривленном пространстве-времени. Так как частица свободная, то ее мировая линия является геодезической. Неэвклидовость метрики приводит к тому, что геодезические уже не являются прямыми. Уравнение движения материальной точки можно получить исходя из принципа наименьшего действия. Но закономерности движения материальной точки в гравитационном поле можно также получить, обобщая выводы специальной теории относительности на случай искривленного пространства-времени.

В специальной теории относительности свободная частица двигается так, что ее 4-скорость не меняется вдоль мировой линии

$$\frac{du^i}{ds} = 0\,; \qquad du^i = 0\ .$$

Последнее равенство естественно переходит в криволинейных координатах в требование равенства нулю ковариантного дифференциала:

$$Du^i = 0\,.$$

Подставляя выражение для Du^i, получаем уравнение

$$du^i + \Gamma^i_{kl} u^k dx^l = 0\,,$$

или

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{kl} \frac{dx^k}{ds}\frac{dx^l}{ds} = 0\,. \qquad (3.22)$$

Последнее соотношение и есть уравнение движения частицы в гравитационном поле. Движение частицы определяется символами Кристоффеля Γ^i_{kl}. Величина $\dfrac{d^2 x^i}{ds^2}$ является 4-мерным ускорением, поэтому $\Gamma^i_{kl} u^k u^l$ можно назвать 4-мерной силой, g_{ik} – потенциалом поля, а производные метрического тензора по координатам $\partial g_{ik} / \partial x^l$, входящие в символы Кристоффеля Γ^i_{kl}, играют роль напряженности поля.

В случае распространения света дифференцирование по интервалу не возможно – световые сигналы распространяются вдоль нулевых мировых линий. В геометрической оптике направление луча определяется волновым вектором, касательным к лучу. Распространение света в пространстве-времени описывается 4-мерным волновым вектором

$$k^i = \frac{dx^i}{d\lambda}\,,$$

где λ - параметр, меняющийся вдоль луча.

В специальной теории относительности при распространении света $k^i = const$, следовательно, $dk^i = 0$. В гравитационном поле $Dk^i = 0$, или

$$\frac{dk^i}{d\lambda} + \Gamma^i_{kl} k^k k^l = 0 . \tag{3.23}$$

Так как трехмерный волновой вектор $\vec{k} = \dfrac{\omega}{c}\vec{n}$ ($\vec{n}$ - единичный вектор вдоль направления распространения волны), то $k^i = \left(\omega/c, \vec{k}\right)$. Тогда

$$k^i k_i = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = 0 .$$

Волновой вектор связан с эйконалом ψ соотношением $k_i = -\partial\psi/\partial x^i$. Подставляя это выражение в последнее равенство, получим уравнение эйконала в гравитационном поле:

$$g^{ik} \frac{\partial\psi}{\partial x^i} \frac{\partial\psi}{\partial x^k} = 0 . \tag{3.24}$$

§ 7. Постоянное гравитационное поле

Гравитационное поле называется постоянным, если можно выбрать такую систему отсчета, в которой все компоненты метрического тензора не зависят от координаты x^0. В этом случае x^0 называется мировым временем. Постоянным может быть поле только одного тела. Если есть несколько тел, то будет и их движение, и, следовательно, их поле не будет постоянным.

Если в выбранной системе отсчета (где $g_{ik} \neq f\left(x^0\right)$) тело неподвижно, то оба направления времени эквивалентны. Тогда величина ds не меняется при изменении знака x^0, и все компоненты $g_{0\alpha} = 0$. Такое гравитационное поле называется статическим. Если тело равномерно вращается вокруг своей оси, то два направления времени неэквивалентны (при смене знака x^0 меняется знак угловой скорости). Такие поля называются стационарными, при этом $g_{0\alpha} \neq 0$.

Смысл мирового времени в постоянном гравитационном поле таков: его промежуток между двумя событиями в некоторой точке равен промежутку между двумя событиями в другой точке, соответственно одновременными с первыми. Но при этом одинаковый промежуток Δx^0 соответствует в разных точках пространства разным промежуткам собственного времени $\Delta\tau$. В слабом поле $g_{00} \approx 1 + {2\varphi}/{c^2}$, поэтому

$$\Delta\tau = \frac{1}{c}\sqrt{1+\frac{2\varphi}{c^2}}\Delta x^0 \approx \frac{\Delta x^0}{c}\left(1+\frac{\varphi}{c^2}\right).$$

Гравитационный потенциал отрицателен. Поэтому чем больше его абсолютная величина, тем меньше $\Delta\tau$ – эффект гравитационного замедления хода часов.

Рассмотрим распространение света в постоянном гравитационном поле. Частота света $\omega = -\partial\psi/\partial t$. Частота, измеряемая в мировом времени, равна

$$\omega_0 = -c\frac{\partial\psi}{\partial x^0}.$$

Уравнение эйконала (3.24) в постоянном поле явно не зависит от x^0, и поэтому $\omega_0 = const$ при распространении света.

Частота, измеряемая в собственном времени $\omega = -\partial\psi/\partial\tau$ различная в разных точках пространства

$$\frac{\partial\psi}{\partial\tau} = \frac{\partial\psi}{\partial x^0}\frac{\partial x^0}{\partial\tau} = \frac{\partial\psi}{\partial x^0}\frac{c}{\sqrt{g_{00}}}, \qquad \omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{g_{00}}} \approx \omega_0\left(1-\frac{\varphi}{c^2}\right).$$

Частота растет с увеличением абсолютной величины гравитационного потенциала.

Пусть свет, испускаемый в точке пространства, где гравитационный потенциал равен φ_1, имеет частоту циклическую ω. В точке пространства, в которой гравитационный потенциалом равен φ_2, свет будет иметь частоту

$$\frac{\omega}{1-\frac{\varphi_1}{c^2}}\left(1-\frac{\varphi_2}{c^2}\right) = \omega\left(1+\frac{\varphi_1-\varphi_2}{c^2}\right).$$

Таким образом, циклическая частота света изменилась , и это изменение составляет $\Delta\omega = \omega(\varphi_1-\varphi_2)/c^2$. Видно, что при распространении света из области с большой гравитацией в область пространства с меньшей гравитацией его частота уменьшается. Это и есть эффект гравитационного красного смещения.

Глава 4. ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОЕ ПОЛЕ

Уже в самой простой задаче – в рассмотрении движения частиц и света в сильном поле, обладающем центральной симметрией, содержатся основные особенности, которые определяют строение плотных звезд, а также процессы релятивистского гравитационного коллапса. Решение уравнений поля Эйнштейна в предположении его центральной симметрии было получено Шварцшильдом в 1916 г.

§ 1. Решение Шварцшильда

Рассмотрим гравитационное поле, обладающее центральной симметрией. Такое поле может создаваться центрально-симметричным распределением вещества. Вещество может двигаться, но поле скорости должно быть центрально-симметричным. Если пользоваться не декартовыми, а сферическими координатами, то при центральной симметрии выражение для интервала можно записать (в наиболее общем виде) так:

$$ds^2 = h(r,t)dr^2 + k(r,t)\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2\right) + l(r,t)dt^2 + a(r,t)drdt \quad (4.1)$$

Мы можем выбрать другую систему координат, выполнив преобразование, не нарушающее центральную симметрию ds^2, т.е.

$$r = f_1(r',t'), \quad , t = f_2(r',t'),$$

где f_1 и f_2, в сущности, любые функции.

Выберем r и t так, чтобы $a(r,t) = 0$, $k(r,t) = -r^2$; h и l запишем в экспоненциальной форме: $h = c^2 e^{\nu}$, $l = -e^{\lambda}$, где ν, λ - функции r и t. Таким образом,

$$ds^2 = c^2 e^{\nu} dt^2 - r^2\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2\right) - e^{\lambda} dr^2 .$$

Введем обозначения $x^0 = ct$, $x^1 = r$, $x^2 = \vartheta$, $x^3 = \varphi$. Выражение для интервала принимает вид

$$ds^2 = e^{\nu}\left(dx^0\right)^2 - e^{\lambda}\left(dx^1\right)^2 - \left(x^1\right)^2\left[\left(dx^2\right)^2 + \sin^2 x^2\left(dx^3\right)^2\right]. \quad (4.2)$$

Заметим, что преобразование, приводящее (4.1) к виду (4.2), можно сделать не всегда (Биркгоф, Новиков – 1961). Может оказаться, что $l > 0$, но $h < 0$ (знаки этих коэффициентов должны быть разными из-за инвариантности сигнатуры метрики):

$$ds^2 = -e^{\nu}\left(dx^0\right)^2 + e^{\lambda}\left(dx^1\right)^2 - \left(x^0\right)^2\left[\left(dx^2\right)^2 + \sin^2 x^2\left(dx^3\right)^2\right].$$

Тогда x^1 – не пространственная координата, а временная, и $\sqrt{g_{11}}x^1$ измеряет собственное время покоящейся частицы. В этом случае можно изменить обозначения координат $x^0 \leftrightarrow x^1$ и

$$ds^2 = e^{\lambda}\left(dx^0\right)^2 - e^{\nu}\left(dx^1\right)^2 - \left(x^0\right)^2\left[\left(dx^2\right)^2 + \sin^2 x^2\left(dx^3\right)^2\right]. \quad (4.3)$$

В первом случае область пространства-времени называется R-областью, во втором - T-областью.

Вернемся к выражению для интервала (4.2). Компоненты ко- и контравариантного метрического тензора будут такими:

$$g_{00} = e^{\nu}, \quad g_{11} = -e^{\lambda}, \quad g_{22} = -r^2, \quad g_{33} = -r^2\sin^2\vartheta.$$

$$g^{00} = e^{\nu}, \quad g^{11} = -e^{-\lambda}, \quad g^{22} = -r^{-2}, \quad g^{33} = -r^{-2}\sin^{-2}\vartheta.$$

Перейдем к вычислению коэффициентов аффинной связности. Символы Кристоффеля с верхним индексом $i = 0$ определяются выражением:

$$\Gamma^0_{kl} = \frac{g^{00}}{2}\left(\frac{\partial g_{0k}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{l0}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^0}\right).$$

Видно, что производная $\frac{\partial g_{0k}}{\partial x^l}$ существует, если $k = 0$, $l = 0{,}1$. Производная $\frac{\partial g_{l0}}{\partial x^k}$ существует, если $k = 0{,}1$, а $l = 0$. Производная $\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^0}$ существует, если $k = l = 0{,}1$. Таким образом, есть только три компоненты с нулевым верхним индексом $\Gamma^0_{00}, \Gamma^0_{01} = \Gamma^0_{10}, \Gamma^0_{11}$:

$$\Gamma_{00}^{0}=\frac{g^{00}}{2}\left(\frac{\partial g_{00}}{\partial x^{0}}+\frac{\partial g_{00}}{\partial x^{0}}-\frac{\partial g_{00}}{\partial x^{0}}\right)=\frac{1}{2}e^{-\nu}\dot{\nu}e^{\nu}=\frac{\dot{\nu}}{2},$$

$$\Gamma_{10}^{0}=\frac{g^{00}}{2}\left(\frac{\partial g_{00}}{\partial x^{1}}\right)=\frac{1}{2}e^{-\nu}\nu' e^{\nu}=\frac{\nu'}{2},$$

$$\Gamma_{11}^{0}=\frac{g^{00}}{2}\left(-\frac{\partial g_{11}}{\partial x^{0}}\right)=\frac{1}{2}e^{-\nu}\lambda' e^{\lambda}=\frac{\dot{\lambda}}{2}e^{\lambda-\nu}.$$

Здесь точкой обозначаются производные по ct, а штрихом – производные по r.

Символы Кристоффеля с индексом $i=1$ имеют вид:

$$\Gamma_{kl}^{1}=\frac{g^{11}}{2}\left(\frac{\partial g_{1k}}{\partial x^{l}}+\frac{\partial g_{l1}}{\partial x^{k}}-\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^{1}}\right).$$

Производная $\frac{\partial g_{1k}}{\partial x^{l}}$ существует, если $k=1, l=0,1$. Производная $\frac{\partial g_{l1}}{\partial x^{k}}$ существует, если $k=0,1; l=1$. Производная $\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^{1}}$ существует, если $k=l=0,1,2,3$. Таким образом, есть пять компонент Γ_{10}^{1}, Γ_{11}^{1}, Γ_{00}^{1}, Γ_{22}^{1}, Γ_{33}^{1}:

$$\Gamma_{00}^{1}=\frac{g^{11}}{2}\left(\frac{\partial g_{00}}{\partial x^{1}}\right)=\frac{1}{2}e^{-\lambda}\nu' e^{\nu}=\frac{\nu'}{2}e^{\nu-\lambda},$$

$$\Gamma_{10}^{1}=\frac{g^{11}}{2}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^{0}}\right)=\frac{1}{2}e^{-\lambda}\dot{\lambda}e^{\lambda}=\frac{\dot{\lambda}}{2},$$

$$\Gamma_{11}^{1}=\frac{g^{11}}{2}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^{1}}\right)=\frac{1}{2}e^{-\lambda}\lambda' e^{\lambda}=\frac{\lambda'}{2},$$

$$\Gamma_{22}^{1}=\frac{g^{11}}{2}\left(-\frac{\partial g_{22}}{\partial x^{1}}\right)=-\frac{1}{2}e^{-\lambda}2r=-re^{-\lambda},$$

$$\Gamma_{33}^{1}=\frac{g^{11}}{2}\left(-\frac{\partial g_{33}}{\partial x^{1}}\right)=-\frac{1}{2}e^{-\lambda}2r\sin^{2}\vartheta=-r\sin^{2}\vartheta e^{-\lambda}.$$

Символы Кристоффеля с верхним индексом $i=2$ определяются так:

$$\Gamma^2_{kl} = \frac{g^{22}}{2}\left(\frac{\partial g_{2k}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{l2}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^2}\right).$$

Производная $\frac{\partial g_{2k}}{\partial x^l}$ существует, если $k = 2, l = 1$. Производная $\frac{\partial g_{l2}}{\partial x^k}$ существует, если $k = 1, l = 2$. Производная $\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^2}$ существует, если $k = l = 3$. Таким образом, есть две компоненты $\Gamma^2_{21}, \Gamma^2_{33}$:

$$\Gamma^2_{21} = \frac{g^{22}}{2}\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}\right) = \frac{1}{2} r^{-2} 2r = \frac{1}{r},$$

$$\Gamma^2_{33} = \frac{g^{22}}{2}\left(-\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2}\right) = -\frac{1}{2} r^{-2} r^2 2\sin\vartheta\cos\vartheta = -\sin\vartheta\cos\vartheta.$$

Вычислим символы Кристоффеля с верхним индексом $i = 3$:

$$\Gamma^3_{kl} = \frac{g^{33}}{2}\left(\frac{\partial g_{3k}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{l3}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^3}\right),$$

Производная $\frac{\partial g_{3k}}{\partial x^l}$ существует, если $k = 3, l = 1, 2$. Производная $\frac{\partial g_{l3}}{\partial x^k}$ существует, если $k = 1, 2, l = 3$. Производная $\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^3}$ не существует. Таким образом, есть две компоненты $\Gamma^3_{31}, \Gamma^3_{32}$:

$$\Gamma^3_{31} = \frac{g^{33}}{2}\left(\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1}\right) = \frac{1}{2} r^{-2} \sin^{-2}\vartheta \cdot 2r\sin^2\vartheta = \frac{1}{r},$$

$$\Gamma^3_{23} = \frac{g^{33}}{2}\left(-\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2}\right) = \frac{1}{2} r^{-2} \sin^{-2}\vartheta \cdot r^2 2\sin\vartheta\cos\vartheta = \mathrm{ctg}\,\vartheta.$$

Перейдем к вычислениям тензора Риччи. В соответствии с выражением

$$R_{ik} = \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^l_{il}}{\partial x^k} + \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm} - \Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km}$$

отличными от нуля оказываются только компоненты $R_{00}, R_{01}, R_{11}, R_{22}, R_{33}$.

Компонента R_{01} определяется выражением

$$R_{01}=\frac{\partial\Gamma^l_{01}}{\partial x^l}-\frac{\partial\Gamma^l_{0l}}{\partial x^1}+\Gamma^m_{lm}\Gamma^l_{01}-\Gamma^l_{1m}\Gamma^m_{0l}.$$

Вычислим отдельно слагаемые

$$\frac{\partial\Gamma^l_{01}}{\partial x^l}=\frac{\partial\Gamma^0_{01}}{\partial x^0}+\frac{\partial\Gamma^1_{01}}{\partial x^1}+\frac{\partial\Gamma^2_{01}}{\partial x^2}+\frac{\partial\Gamma^3_{01}}{\partial x^3}=\frac{\dot\nu'}{2}+\frac{\dot\lambda'}{2},$$

$$\frac{\partial\Gamma^l_{0l}}{\partial x^1}=\frac{\partial\Gamma^0_{00}}{\partial x^1}+\frac{\partial\Gamma^1_{01}}{\partial x^1}+\frac{\partial\Gamma^2_{02}}{\partial x^1}+\frac{\partial\Gamma^3_{03}}{\partial x^1}=\frac{\dot\nu'}{2}+\frac{\dot\lambda'}{2},$$

$$\Gamma^l_{01}\Gamma^m_{lm}=\Gamma^0_{01}\Gamma^0_{00}+\Gamma^0_{01}\Gamma^1_{01}+\Gamma^1_{01}\Gamma^0_{10}+\Gamma^1_{01}\Gamma^1_{11}+\Gamma^1_{01}\Gamma^2_{12}+\Gamma^1_{01}\Gamma^3_{13},$$

$$\Gamma^m_{0l}\Gamma^l_{1m}=\Gamma^0_{00}\Gamma^0_{01}+\Gamma^0_{01}\Gamma^1_{10}+\Gamma^1_{00}\Gamma^0_{11}+\Gamma^1_{01}\Gamma^1_{11},$$

$$\Gamma^m_{lm}\Gamma^l_{01}-\Gamma^l_{1m}\Gamma^m_{0l}=\Gamma^1_{01}\Gamma^0_{10}+\Gamma^1_{01}\Gamma^2_{12}+\Gamma^1_{01}\Gamma^3_{13}-\Gamma^1_{00}\Gamma^0_{11}.$$

Выполнив необходимые подстановки, получим

$$R_{01}=\frac{\dot\lambda}{2}\frac{\nu'}{2}+\frac{\dot\lambda}{2}\frac{1}{r}+\frac{\dot\lambda}{2}\frac{1}{r}-\frac{\nu}{2}e^{\nu-\lambda}\frac{\dot\lambda}{2}e^{\lambda-\nu}=\frac{\dot\lambda}{r}.$$

Для дальнейших вычислений используем уравнения поля Эйнштейна, в форме, разрешенной относительно тензора Риччи,

$$R_{ik}=\frac{8\pi\gamma}{c^4}\left(T_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}T\right).$$

Вне гравитирующей материи, в пустоте $T_{ik}=0$, $T=0$, поэтому компонента 01 уравнения поля приводит к требованию $\dot\lambda=0$. Таким образом, λ может зависеть только от координаты r. Тогда $\Gamma^0_{11}=\Gamma^1_{01}=0$.

Компонента R_{00} определяется выражением

$$R_{00}=\frac{\partial\Gamma^l_{00}}{\partial x^l}-\frac{\partial\Gamma^l_{0l}}{\partial x^0}+\Gamma^m_{lm}\Gamma^l_{00}-\Gamma^l_{0m}\Gamma^m_{0l}.$$

Вычислим слагаемые:

$$\frac{\partial\Gamma^l_{00}}{\partial x^l}=\frac{\partial\Gamma^0_{00}}{\partial x^0}+\frac{\partial\Gamma^1_{00}}{\partial x^1}+\frac{\partial\Gamma^2_{00}}{\partial x^2}+\frac{\partial\Gamma^3_{00}}{\partial x^3}=\frac{\ddot\nu}{2}+\left[\frac{\nu''}{2}+\frac{\nu'\left(\nu'-\lambda'\right)}{2}\right]e^{\nu-\lambda},$$

$$\frac{\partial \Gamma^l_{0l}}{\partial x^l} = \frac{\partial \Gamma^0_{00}}{\partial x^0} = \frac{\ddot{\nu}}{2},$$

$$\Gamma^l_{00}\Gamma^m_{lm} = \Gamma^0_{00}\left(\Gamma^0_{00} + \Gamma^1_{01} + \Gamma^2_{02} + \Gamma^3_{03}\right) + \Gamma^1_{00}\left(\Gamma^0_{10} + \Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12} + \Gamma^3_{13}\right) +$$

$$+\Gamma^2_{00}\left(\Gamma^0_{20} + \Gamma^1_{21} + \Gamma^2_{22} + \Gamma^3_{23}\right) + \Gamma^3_{00}\left(\Gamma^0_{30} + \Gamma^1_{31} + \Gamma^2_{32} + \Gamma^3_{33}\right) =$$

$$= \Gamma^0_{00}\Gamma^0_{00} + \Gamma^1_{00}\Gamma^0_{10} + \Gamma^1_{00}\Gamma^1_{11} + \Gamma^1_{00}\Gamma^3_{13},$$

$$\Gamma^m_{0l}\Gamma^l_{0m} = \Gamma^0_{00}\Gamma^0_{00} + \Gamma^0_{01}\Gamma^1_{00} + \Gamma^0_{02}\Gamma^2_{00} + \Gamma^0_{03}\Gamma^3_{00} + \Gamma^1_{00}\Gamma^0_{01} + \Gamma^1_{01}\Gamma^1_{01},$$

$$\Gamma^m_{0l}\Gamma^l_{0m} = \Gamma^0_{00}\Gamma^0_{00} + \Gamma^0_{01}\Gamma^1_{00} + \Gamma^0_{02}\Gamma^2_{00} + \Gamma^0_{03}\Gamma^3_{00} + \Gamma^1_{00}\Gamma^0_{01} + \Gamma^1_{01}\Gamma^1_{01},$$

$$\Gamma^m_{lm}\Gamma^l_{00} - \Gamma^l_{0m}\Gamma^m_{0l} = \Gamma^1_{00}\Gamma^1_{11} + \Gamma^1_{00}\Gamma^2_{12} + \Gamma^1_{00}\Gamma^3_{13} + \Gamma^1_{00}\Gamma^3_{13} - \Gamma^1_{00}\Gamma^0_{01}.$$

Выполнив подстановки, получим

$$R_{00} = \frac{\nu''}{2}e^{\nu-\lambda} + \frac{\nu'\left(\nu'-\lambda'\right)}{2}e^{\nu-\lambda} + \frac{\nu'}{2}e^{\nu-\lambda}\frac{\lambda'}{2} +$$

$$+\frac{\nu'}{2}e^{\nu-\lambda}\frac{1}{r} + \frac{\nu'}{2}e^{\nu-\lambda}\frac{1}{r} - \frac{\nu'}{2}e^{\nu-\lambda}\frac{\nu'}{2} =$$

$$= \frac{\nu''}{2}e^{\nu-\lambda} + \frac{\nu'}{r}e^{\nu-\lambda} - \frac{\nu'\lambda'}{4}e^{\nu-\lambda} + \frac{\nu'^2}{4}e^{\nu-\lambda}.$$

Компонента R_{11} определяется выражением

$$R_{11} = \frac{\partial \Gamma^l_{11}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^l_{1l}}{\partial x^1} + \Gamma^m_{lm}\Gamma^l_{11} - \Gamma^l_{1m}\Gamma^m_{1l}.$$

Здесь

$$\frac{\partial \Gamma^l_{11}}{\partial x^l} = \frac{\partial \Gamma^0_{11}}{\partial x^0} + \frac{\partial \Gamma^1_{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial \Gamma^2_{11}}{\partial x^2} + \frac{\partial \Gamma^3_{11}}{\partial x^3} = \frac{\lambda''}{2},$$

$$\frac{\partial \Gamma^l_{1l}}{\partial x^1} = \frac{\partial \Gamma^0_{10}}{\partial x^1} + \frac{\partial \Gamma^1_{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial \Gamma^2_{12}}{\partial x^1} + \frac{\partial \Gamma^3_{13}}{\partial x^1} = \frac{\nu''}{2} + \frac{\lambda''}{2} - \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2},$$

$$\Gamma^l_{11}\Gamma^m_{lm} = \Gamma^0_{11}\Gamma^0_{00} + \Gamma^0_{11}\Gamma^1_{01} + \Gamma^1_{11}\Gamma^0_{10} + \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{11} + \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} + \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12},$$

$$\Gamma^m_{1l}\Gamma^l_{1m} = \Gamma^0_{10}\Gamma^0_{10} + \Gamma^0_{11}\Gamma^1_{10} + \Gamma^1_{10}\Gamma^0_{11} + \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12} + \Gamma^3_{13}\Gamma^3_{13}.$$

$$\Gamma^m_{lm}\Gamma^l_{11} - \Gamma^l_{1m}\Gamma^m_{1l} = \Gamma^1_{11}\Gamma^0_{10} + \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} + \Gamma^1_{11}\Gamma^3_{13} - \Gamma^0_{10}\Gamma^0_{10} - \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12} - \Gamma^3_{13}\Gamma^3_{13};$$

После подстановок получаем:

$$R_{11} = -\frac{\nu''}{2} + \frac{\lambda'\nu'}{4} + \frac{\lambda'}{r} - \frac{\nu'^2}{4}.$$

Компоненты 00 и 11 уравнений поля приводят к равенствам

$$\frac{\nu''}{2}e^{\nu-\lambda} + \frac{\nu'}{r}e^{\nu-\lambda} - \frac{\nu'\lambda'}{4}e^{\nu-\lambda} + \frac{\nu'^2}{4}e^{\nu-\lambda} = 0, \tag{4.4}$$

$$-\frac{\nu''}{2} + \frac{\lambda'\nu'}{4} + \frac{\lambda'}{r} - \frac{\nu'^2}{4} = 0. \tag{4.5}$$

Умножая (4.5) на $e^{\nu-\lambda}$ и складывая с (4.4), получим уравнение

$$\nu' + \lambda' = 0.$$

Таким образом, сумма $\nu + \lambda$ является функцией только времени. Но λ не зависит от времени, поэтому от времени зависит только ν'. Есть еще преобразование времени, не нарушающее центральную симметрию выражения для интервала $t = f(t')$. Выберем преобразование такое, что $\nu + \lambda = 0$, то есть $\lambda = -\nu$. Но λ не зависит от времени, следовательно, и ν не является функцией времени. Таким образом, центрально-симметричное поле в пустоте автоматически оказывается статическим.

Нам потребуется еще только одна компонента тензора Риччи – R_{22}:

$$R_{22} = \frac{\partial\Gamma^l_{22}}{\partial x^l} - \frac{\partial\Gamma^l_{2l}}{\partial x^2} + \Gamma^m_{lm}\Gamma^l_{22} - \Gamma^l_{2m}\Gamma^m_{2l},$$

$$\frac{\partial\Gamma^l_{22}}{\partial x^l} = \frac{\partial\Gamma^0_{22}}{\partial x^0} + \frac{\partial\Gamma^1_{22}}{\partial x^1} + \frac{\partial\Gamma^2_{22}}{\partial x^2} + \frac{\partial\Gamma^3_{22}}{\partial x^3} = -e^{\nu} - r\nu'e^{\nu},$$

$$\frac{\partial\Gamma^l_{2l}}{\partial x^2} = \frac{\partial\Gamma^0_{20}}{\partial x^2} + \frac{\partial\Gamma^1_{21}}{\partial x^2} + \frac{\partial\Gamma^2_{22}}{\partial x^2} + \frac{\partial\Gamma^3_{23}}{\partial x^2} = \frac{d\,\mathrm{ctg}\,\vartheta}{d\vartheta} = -\frac{1}{\sin^2\vartheta},$$

$$\Gamma^l_{22}\Gamma^m_{lm} = \Gamma^1_{22}\Gamma^0_{10} + \Gamma^1_{22}\Gamma^1_{11} + \Gamma^1_{22}\Gamma^2_{12} + \Gamma^1_{22}\Gamma^3_{13},$$

$$\Gamma^m_{2l}\Gamma^l_{2m} = \Gamma^1_{22}\Gamma^2_{21} + \Gamma^2_{21}\Gamma^1_{22} + \Gamma^3_{23}\Gamma^3_{23},$$

$$\Gamma^m_{lm}\Gamma^l_{22}-\Gamma^l_{2m}\Gamma^m_{2l}=\Gamma^1_{22}\Gamma^0_{10}+\Gamma^1_{22}\Gamma^1_{11}+\Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12}+\Gamma^1_{22}\Gamma^3_{13}-\Gamma^2_{12}\Gamma^1_{22}-\Gamma^3_{23}\Gamma^3_{23},$$

$$R_{22}=1-e^{\nu}-r\nu' e^{\nu}.$$

Соответствующая компонента уравнений Эйнштейна обуславливает требование

$$1-e^{\nu}-r\nu' e^{\nu}=0. \tag{4.6}$$

Введем обозначение $e^{\nu}\equiv y$, тогда уравнение (4.6) перепишется в виде

$$\frac{dy}{dr}=\frac{1-y}{r}.$$

Решение этого уравнения $y=1+\frac{C}{r}$, т.е.

$$e^{\nu}=e^{-\lambda}=1+\frac{C}{r}.$$

Константу C легко выразить, рассмотрев ньютоновский предел. Действительно, при $r\to\infty$ гравитация слабая, поэтому можем положить, что

$$g_{00}=1+\frac{2\varphi}{c^2}=1-\frac{2Gm}{rc^2}.$$

Отсюда следует, что $C=-\frac{2Gm}{c^2}$. Введем обозначение $r_g=\frac{2Gm}{c^2}$. Тогда

$$e^{\nu}=e^{-\lambda}=1-\frac{r_g}{r}. \tag{4.7}$$

Величина r_g называется гравитационным радиусом, а поверхность $r=r_g$ называется сферой Шварцшильда, а также горизонтом событий. Окончательно выражение для интервала имеет вид

$$ds^2=\left(1-\frac{r_g}{r}\right)c^2dt^2-\frac{dr^2}{1-\frac{r_g}{r}}-r^2\left(d\vartheta^2+\sin^2\vartheta d\varphi^2\right). \tag{4.8}$$

Заметим, что мы, в сущности, доказали теорему Биркгофа, которая утверждает, что при сферической симметрии решение уравнений поля есть обязательно решение Шварцшильда. Следствием теоремы является примечательный факт. Как и в ньютоновском случае слабой гравитации, поле внутри сферически симметричной полости отсутствует.

На очень больших расстояниях от центра ($r \gg r_g$) выражение для интервала может быть записано в следующем виде:

$$ds^2 \approx \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 - dr^2 \left(1 + \frac{r_g}{r}\right) - r^2 \left(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2\right) =$$

$$= c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 \left(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2\right) - \frac{r_g}{r}\left(c^2 dt^2 + dr^2\right).$$

Величина $\frac{r_g}{r}\left(c^2 dt^2 + dr^2\right)$ является малой поправкой. Однако на больших расстояниях поле любой системы материальных тел обладает центральной симметрией, поэтому выражение

$$ds^2 = ds_0^2 - \frac{r_g}{r}\left(c^2 dt^2 + dr^2\right)$$

справедливо для любого распределения массы (на больших расстояниях).

§ 2. Гравитационное замедление хода часов

Над горизонтом событий, т.е. при $r \ge r_g$, компонента метрического тензора $g_{00} \le 1$. Так как $d\tau = \frac{\sqrt{g_{00}}}{c} dt$, то $d\tau \le dt$ – на конечных расстояниях от массы часы замедляются и на поверхности Шварцшильда время «останавливается». Представим себе следующую ситуацию. Источник излучает свет в течение секунды по собственным часам с секундными интервалами между вспышками. Удаленный наблюдатель видит, что с приближением источника к горизонту событий длительность вспышек увеличивается, увеличиваются и интервалы между вспышками. Наконец, источник настолько приблизится к горизонту событий, что удаленный наблюдатель не сможет дождаться приема очередного сигнала.

§ 3. Ускорение материальной точки

Рассмотрим трехмерный вектор ускорения, которое испытывает тело, покоящееся в некоторой системе отсчета. Для него $ds^2 = g_{00}\left(dx^0\right)^2$ и его четырехмерная скорость равна

$$u^0 = \frac{dx^0}{ds} = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} .$$

В начальный момент времени $u^\alpha = 0$, и в последующие моменты времени пространственные компоненты скорости малы.

Уравнения движения

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{kl}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^l}{ds} = 0$$

для пространственных компонент дают уравнение

$$\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} = -\Gamma^\alpha_{kl}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^l}{ds} = -\frac{\Gamma^\alpha_{00}}{g_{00}} .$$

Представив интервал в виде $ds^2 = c^2 d\tau^2$, имеем

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} = -\frac{c^2\Gamma^\alpha_{00}}{g_{00}} \equiv F^\alpha .$$

F^α, F_α – ускорение, которое тело испытывает относительно системы отсчета. Из связи символов Кристоффеля с метрическим тензором получаем

$$\Gamma_{\alpha;00} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha 0}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0\alpha}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\alpha}\right) = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\alpha} ,$$

$$\Gamma^\alpha_{00} = -\frac{g^{\alpha\alpha}}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\alpha} .$$

Согласно решению Шварцшильда, в последнее выражение входит только производная dg_{00}/dx^1. Поэтому из всех компонент трехмерного ускорения останутся только F^1 и F_1.

Модуль трехмерного ускорения определяется выражением:

$$F=\sqrt{F^{\alpha}F_{\alpha}}=\sqrt{F^{1}F_{1}}=$$

$$=\sqrt{-\frac{c^2}{g_{00}}\left(-\frac{g^{11}}{2}\right)\frac{\partial g_{00}}{\partial x^1}\frac{c^2}{g_{00}}\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^1}\right)}=\frac{c^2}{2g_{00}}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^1}\sqrt{-g^{11}}\ .$$

Учитывая, что $g_{00}=1-\frac{r_g}{r}$, $g_{11}=-\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-1}$ и $\frac{\partial g_{00}}{\partial x^1}=\frac{r_g}{r^2}$ получим

$$F=\frac{c^2}{1-\frac{r_g}{r}}\frac{r_g}{r}\sqrt{1-\frac{r_g}{r}}=\frac{GM}{r^2\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{3/2}}\ . \qquad (4.9)$$

При $r\to r_g$ величина трехмерного ускорения стремится к бесконечности. Любое тело, если оно статическое, не может иметь радиус меньше r_g, после сжатия тела до размера сферы Шварцшильда наступает сжатие, которое не может быть остановлено.

Пусть материальное тело конечных размеров приближается к поверхности горизонта событий. При этом оно будет испытывать действие приливных сил, величина которых определяется выражением (4.9). Приливные силы растягивают тело в радиальном направлении. В результате никакое тело не может достигнуть поверхности Шварцшильда с сохранением своей целостности.

§ 4. Радиальное движение фотонов

При радиальном движении фотонов $d\vartheta=0$, $d\varphi=0$; выражение для интервала приобретает вид

$$ds^2=\left(1-\frac{r_g}{r}\right)c^2dt^2-\frac{dr^2}{1-\frac{r_g}{r}}\ .$$

Известна связь интервалов времени $\Delta\tau=\sqrt{g_{00}}\Delta t$ и частот $\omega=\omega_0\big/\sqrt{g_{00}}$, где ω - частота, измеряемая в собственном времени, а ω_0 - частота, измеряемая в мировом времени.

Пусть свет идет из точки, находящейся на расстоянии r от горизонта событий, на бесконечность. Тогда

$$\omega_r = \frac{\omega_0}{\sqrt{g_{00}(r)}} .$$

На бесконечности регистрируется свет с частотой

$$\omega_\infty = \frac{\omega_0}{\sqrt{g_{00}(\infty)}} = \omega_0 ,$$

поэтому $\omega_r = \dfrac{\omega_\infty}{\sqrt{g_{00}(r)}}$, или

$$\omega_\infty = \omega_r \sqrt{1 - \frac{r_g}{r}} .$$

С приближением источника к горизонту событий частота света, принимаемого удаленным наблюдателем, стремится к нулю.

Представим, что источник света свободно падает на поверхность Шварцщильда, посылая удаленному наблюдателю сигналы ежесекундно по сопутствующим часам. Наблюдатель видит, что промежуток времени между вспышками увеличивается до бесконечности, а частота стремится к нулю. Таким образом, удаленный наблюдатель никогда не увидит момента достижения источником горизонта событий. Эффект Допплера только усиливает эффект красного смещения.

§ 5. Радиальное падение массивных частиц

Для массивных частиц $ds^2 \neq 0$, и анализ движения необходимо выполнять с помощью уравнения геодезических:

$$du^i + \Gamma^i_{kl} u^k dx^l = 0 .$$

При радиальном движении имеются только u^0 , u^1 , dx^0 и dx^1. Удобнее использовать нулевую компоненту уравнения движения. Для нее имеем

$$\Gamma^0_{10} = \frac{\nu'}{2} ,$$

$$e^{\nu}=1-\frac{r_g}{r}, \quad \nu=\ln\left(1-\frac{r_g}{r}\right), \quad \nu'=\frac{r_g}{r^2}\frac{1}{1-\frac{r_g}{r}}.$$

Следовательно,

$$\Gamma^0_{01}=\frac{r_g}{2r^2}\frac{1}{1-\frac{r_g}{r}}.$$

Тогда нулевая компонента уравнения движения выглядит так:

$$du^0+\Gamma^0_{00}u^0dx^0+\Gamma^0_{01}u^0dx^1+\Gamma^0_{10}u^1dx^0+\Gamma^0_{11}u^1dx^1=0,$$

$$du^0+2\Gamma^0_{01}\frac{dx^0dx^1}{ds}=0,$$

или

$$du^0+2\Gamma^0_{01}u^0dx^1=0.$$

Отсюда

$$\frac{du^0}{u^0}=-2\Gamma^0_{01}dx^1=-\frac{r_g}{2r^2}\frac{1}{1-\frac{r_g}{r}}dr=-\frac{d\left(1-\frac{r_g}{r}\right)}{1-\frac{r_g}{r}}.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$u^0=\frac{a}{1-\frac{r_g}{r}}.$$

Постоянную интегрирования a найдем из начальных условий. Пусть тело падает без начальной скорости, находясь в начальный момент времени на расстояния $r=r_0$ от горизонта событий (там же процесс падения и наблюдается). В начальный момент времени тело покоится, и для него

$$ds^2=c^2dt^2\left(1-\frac{r_g}{r}\right).$$

Тогда

$$u^0(0)=\frac{dx^0}{ds}=\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{r_g}{r_0}}}\,; \qquad a=\sqrt{1-\frac{r_g}{r_0}}\,.$$

Итак,

$$u^0=\frac{\sqrt{1-\dfrac{r_g}{r_0}}}{1-\dfrac{r_g}{r}}\,.$$

Далее, $u^0=\dfrac{dx^0}{ds}$, значит, $\left(dx^0\right)^2=\left(u^0\right)^2 ds^2$. Тогда

$$c^2dt^2=\frac{1-\dfrac{r_g}{r_0}}{1-\dfrac{r_g}{r}}c^2dt-\frac{1-\dfrac{r_g}{r_0}}{\left(1-\dfrac{r_g}{r}\right)^3}dr^2\,.$$

Отсюда следует

$$\frac{dr^2}{dt^2}=c^2\left(\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^2-\frac{\left(1-\dfrac{r_g}{r}\right)^3}{1-\dfrac{r_g}{r_0}}\right),$$

или

$$\frac{dr}{dt}=c\left(1-\frac{r_g}{r}\right)\left(1-\frac{1-\dfrac{r_g}{r}}{1-\dfrac{r_g}{r_0}}\right)^{1/2} \tag{4.10}$$

– закон изменения радиальной координаты свободно падающей частицы по времени наблюдателя в точке $r=r_0$. При $r\to r_g$ скорость изменения его радиальной координаты $dr/dt\to 0$. Время падения определяется так:

$$\Delta t = \int_{r_0}^{r} \left(\frac{dr}{dt} \right)^{-1} dr \tag{4.11}$$

Этот интеграл расходится при $r \to r_g$. Таким образом, по часам стороннего наблюдателя время падения частицы на $r = r_g$ бесконечно – тело асимптотически приближается к $r = r_g$, застывая над сферой Шварцшильда.

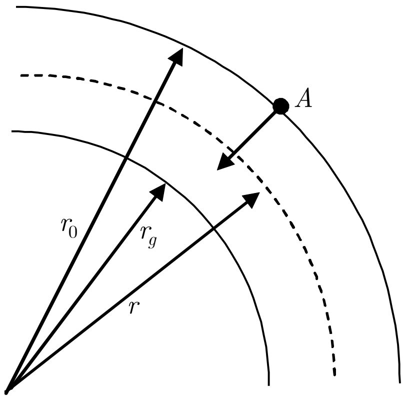

Рис. 8. Падение тела на горизонт событий

Пусть теперь наблюдатель находится в точке A (рис 8). Мимо него пролетает пробное тело. Его скорость в системе отсчета точки A есть $\frac{dx}{d\tau}$, где τ - собственное время в этой системе отсчета. При этом $dx = dr \Big/ \sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}$ –, следовательно

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}} = \frac{dr}{dt} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}} \frac{dt}{d\tau},$$

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}}, \qquad \frac{dx}{d\tau} = \frac{dr}{dt} \frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}} = c \left[1 - \frac{1 - \frac{r_g}{r}}{1 - \frac{r_g}{r_0}} \right]^{1/2}.$$

С приближением наблюдателя к поверхности r_g величина $dx/d\tau$ стремится к скорости света.

Каково время падения материальной точки с $r = r_0$ на $r = r_g$ по показаниям сопутствующих часов? В сопутствующей (свободно падающей) системе отсчета

$$ds = cdT\ , \qquad \Delta T = \frac{1}{c}\int ds\ .$$

Но интервал ds является инвариантом, его можно измерить в любой системе отсчета. Вычислим его в системе отсчета удаленного наблюдателя:

$$\Delta T = \frac{1}{c}\int_{r_0}^{r}\sqrt{\left(1-\frac{r_g}{r}\right)c^2\frac{dt^2}{dr^2} - \frac{1}{1-\frac{r_g}{r}}}dr = \frac{1}{c}\int_{r_0}^{r}\sqrt{\frac{\left(1-\frac{r_g}{r}\right)}{\left(\frac{dr}{cdt}\right)^2} - \frac{1}{1-\frac{r_g}{r}}}dr\ .$$

Упростим ситуацию: пусть частица падает из бесконечности. Тогда

$$\frac{dr}{dt} = c\left(1-\frac{r_g}{r}\right)\sqrt{\frac{r_g}{r}}\ ,$$

и время приближения на расстояние r определяется так:

$$\Delta T = \frac{1}{c}\int_{r_1}^{r}\sqrt{\frac{\left(1-\frac{r_g}{r}\right)}{\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^2\frac{r_g}{r}} - \frac{1}{1-\frac{r_g}{r}}}dr = \frac{1}{c}\int_{r_1}^{r}\sqrt{\frac{r_g}{r}}dr\ .$$

Вычислив интеграл, получим

$$\Delta T = \frac{2}{3c\sqrt{r_g}}\left[r^{3/2} - r_1^{3/2}\right].$$

Промежуток времени конечный даже при $r = r_g$. Свободно падающий наблюдатель достигает горизонта событий за конечное время.

Выражение (4.10) перепишем в виде

$$\int_{t_0}^{t} cdt = -\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{\left(1-\frac{r_g}{r}\right)\sqrt{1-\frac{1-\frac{r_g}{r}}{1-\frac{r_g}{r_0}}}}\ . \qquad (4.12)$$

Пусть $r = r_g + x$, $x \ll r_g$. Тогда выражение

$$f(r) = -\frac{r_g}{r}\sqrt{1 - \frac{1 - \frac{r_g}{r}}{1 - \frac{r_g}{r_0}}} = f(x)$$

можно разложить в ряд по малому параметру

$$\frac{x}{r_g} = \frac{r - r_g}{r_g}.$$

В результате из (4.12) получим

$$c(t - t_0) = -r_g \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r - r_g} = -r_g \int_{r_0}^{r} d\ln(r - r_g),$$

отсюда

$$r - r_g \sim e^{-\frac{ct}{r_g}}.$$

Мы пришли к интересному выводу: удаленный наблюдатель регистрирует экспоненциальное зависание падающего тела над поверхностью Шварцшильда.

Можно показать, что по наблюдениям удаленного наблюдателя интенсивность света свободно падающего источника быстро убывает по экспоненциальному закону. Таким образом, поверхность коллапсирующей звезды бесконечно долго приближается к $r = r_g$ (застывшие звезды), практически мгновенно переставая быть видимой.

§ 6. Орбитальное движение в центрально-симметричном гравитационном поле

Рассмотрим общий случай – нерадиальные траектории тел в поле Шварцшильда. Для анализа такого движения удобно воспользоваться уравнением Гамильтона–Якоби, которое естественно обобщается на случай искривленного пространства времени простой заменой метрического тензора η_{ik} на g_{ik}:

$$g^{ik}\frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^k}=m^2c^2 . \qquad (4.13)$$

В случае центрально-симметричного гравитационного поля

$$g_{00}=1-\frac{r_g}{r}, \quad g_{rr}=-\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-1}, \quad g_{\vartheta\vartheta}=-r^2, \quad g_{\varphi\varphi}=-r^2\sin^2\vartheta ;$$

$$g^{00}=\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-1}, \quad g^{rr}=-\left(1-\frac{r_g}{r}\right), \quad g^{\vartheta\vartheta}=-r^{-2},$$

$$g^{\varphi\varphi}=-r^{-2}\sin^{-2}\vartheta .$$

Рассмотрим орбитальное движение в плоскости $\vartheta=\frac{\pi}{2}$, причем $d\vartheta=0$. В этом случае уравнение Гамильтона–Якоби выглядит так:

$$\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-1}\left(\frac{\partial S}{c\partial t}\right)^2-\left(1-\frac{r_g}{r}\right)\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2-\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial\varphi}\right)^2-m^2c^2=0 .$$

По общим правилам решение уравнения Гамильтона–Якоби ищем в виде

$$S=-Et+L\varphi+R(r), \qquad (4.14)$$

где E – энергия, L – момент импульса точки. Производные

$$\frac{\partial S}{c\partial t}=-\frac{E}{c}; \quad \frac{\partial S}{\partial r}=\frac{\partial R}{\partial r}; \quad \frac{\partial S}{\partial\varphi}=L ,$$

и уравнение Гамильтона–Якоби перепишется в виде

$$\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-1}\left(\frac{E}{c}\right)^2-\left(1-\frac{r_g}{r}\right)\left(\frac{\partial R}{\partial r}\right)^2-\frac{1}{r^2}L^2-m^2c^2=0 .$$

Отсюда

$$\left(\frac{\partial R}{\partial r}\right)^2=\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-2}\left(\frac{E}{c}\right)^2-\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-1}r^{-2}L^2-\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-1}m^2c^2 ,$$

или

$$\left(\frac{\partial R}{\partial r}\right)^2 = \left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-2}\frac{E^2}{c^2} - \left(m^2c^2 + \frac{L^2}{r^2}\right)\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-1};$$

$$R = \int\left[\frac{E^2}{c^2}\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-2} - \left(m^2c^2 + \frac{L^2}{r^2}\right)\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-1}\right]^{1/2} dr\,. \qquad (4.15)$$

Это выражение можно подставить в (4.14). Уравнение $\frac{\partial S}{\partial E} = const$ позволяет получить зависимость $r(t)$. Действительно, $\frac{\partial S}{\partial E} = -t + \frac{\partial R}{\partial E} = const = 0$ (выбором начала отсчета времени постоянную можно положить равной нулю).

Тогда из (4.15) получаем

$$t = \frac{\partial}{\partial E}\int f dr = \int \frac{\partial f}{\partial E} dr =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2\frac{E}{c^2}\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-2} dr}{\sqrt{\frac{E^2}{c^2}\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-2} - \left(m^2c^2 + \frac{L^2}{r^2}\right)\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-1}}},$$

или

$$t = \frac{E}{c^2}\int \frac{dr}{\left(1-\frac{r_g}{r}\right)\sqrt{\frac{E^2}{c^2} - \left(m^2c^2 + \frac{L^2}{r^2}\right)\left(1-\frac{r_g}{r}\right)}}\,. \qquad (4.16)$$

Представим это выражение в дифференциальной форме:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{c^2}{E}\left(1-\frac{r_g}{r}\right)\sqrt{\frac{E^2}{c^2} - \left(m^2c^2 + \frac{L^2}{r^2}\right)\left(1-\frac{r_g}{r}\right)}\,. \qquad (4.17)$$

Траектория тела может быть найдена из условия $\frac{\partial S}{\partial L} = const$:

$$\frac{\partial S}{\partial L} = \varphi + \frac{\partial R}{\partial r} = const = 0\,.$$

$$\varphi = \int \frac{L dr}{r^2 \sqrt{\frac{E^2}{c^2} - \left(m^2 c^2 + \frac{L^2}{r^2} \right)\left(1 - \frac{r_g}{r} \right)}}\,, \tag{4.18}$$

а в дифференциальной форме

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{L}{r^2 \sqrt{\frac{E^2}{c^2} - \left(m^2 c^2 + \frac{L^2}{r^2} \right)\left(1 - \frac{r_g}{r} \right)}}\,. \tag{4.19}$$

Перемножив (4.17) и (4.19), получим

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c^2}{E}\left(1 - \frac{r_g}{r} \right)\frac{L}{r^2}\,. \tag{4.20}$$

Уравнения (4.15) и (4.18), или (4.17) и (4.20) определяют траекторию материальной точки в поле Шварцшильда.

Рассмотрим уравнение (4.17). Условие $dr/dt = 0$ -позволяет определить точки остановки при одномерном движении:

$$\frac{E^2}{c^2} - \left(m^2 c^2 + \frac{L^2}{r^2} \right)\left(1 - \frac{r_g}{r} \right) = 0\,;$$

$$\frac{E^2}{c^2} - m^2 c^2 - \frac{L^2}{r^2} + m^2 c^2 \frac{r_g}{r} + \frac{L^2 r_g}{r^3} = 0\,. \tag{4.21}$$

$$\frac{E^2}{c^2} - m^2 c^2 = \frac{\left(E - mc^2 \right)\left(E + mc^2 \right)}{c^2}\,.$$

Введем обозначение $E_1 = E - mc^2 = \frac{mv^2}{2}$ – нерелятивистская кинетическая энергия частицы. При малых скоростях $v \ll c$ кинетическая энергия много меньше энергии покоя $E_1 \ll mc^2$. Тогда $E + mc^2 \approx 2mc^2$. Таким образом, $\frac{E}{c^2} - m^2 c^2 \approx E_1 \frac{2mc^2}{c^2} = 2mE_1$. В случае слабого гравитационного поля слагаемым $\frac{L^2 r_g}{r^3}$ можно пренебречь. Тогда уравнение (4.21) примет вид

$$E - \frac{L^2}{2mr^2} + \gamma \frac{mM}{r} = 0 . \qquad (4.22)$$

Здесь $\frac{L^2}{2mr^2}$ – «центробежная» энергия, $-\gamma \frac{mM}{r}$ – потенциальная энергия. Мы получаем одномерное движение в поле с эффективной потенциальной энергией $U_{\text{эфф}} = U(r) + \frac{L^2}{2mr^2}$. При $r \to \infty$ величина эффективной потенциальной энергии изменяется по закону $U_{\text{эфф}} \sim -\frac{1}{r}$; при $r \to 0$ зависимость иная: $U_{\text{эфф}} \sim -\frac{1}{r^2}$. Требование $\frac{\partial U}{\partial r} = 0$ определит круговые орбиты тела.

Вернемся к общему случаю любых скоростей и расстояний в выражении (4.17):

$$\frac{dr}{dt} = \frac{c^2}{E}\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\sqrt{\frac{E^2}{c^2} - m^2c^2 - \frac{L^2}{r^2} + m^2c^2\frac{r_g}{r} + \frac{L^2 r_g}{r^3}} .$$

Удобно перейти к безразмерным переменным. Пусть $r = Rr_g$, $t = \tau \frac{r_g}{c}$, $L = amcr_g$, $E = mc^2\varepsilon$ (на бесконечности $\varepsilon = 1$). Тогда

$$\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{c^2} - m^2c^2 - \frac{L^2}{r^2} + m^2c^2\frac{r_g}{r} + \frac{L^2 r_g}{r^3}} = mc\sqrt{\varepsilon^2 - 1 - \frac{a^2}{R^2} + \frac{1}{R} + \frac{a^2}{R^3}} .$$

Безразмерное уравнение (4.17) выглядит так:

$$\frac{dR}{d\tau} = \frac{1}{\varepsilon^2}\left(1 - \frac{1}{R}\right)\sqrt{\varepsilon^2 - 1 - \frac{a^2}{R^2} + \frac{1}{R} + \frac{a^2}{R^3}} .$$

Выражение $\frac{dR}{d\tau} = 0$ определяет точки поворота. Условие будет выполнено либо при $R=1$ $\left(r \to r_g\right)$, либо при $\varepsilon^2 - 1 - \frac{a^2}{R^2} + \frac{1}{R} + \frac{a^2}{R^3} = 0$. Тогда

$$U\left(R\right) = 1 + \frac{a^2}{R^2} - \frac{1}{R} - \frac{a^2}{R^3} = 0.$$

При $R \to 1$ и любой величине безразмерного момента импульса $U \to 0$. При $R \to \infty$ потенциальная энергия стремится к единице $U \to 1$ как $-\frac{1}{R}$.

Вычислим производную потенциальной энергии по радиальной координате:

$$\frac{dU}{dR} = -\frac{2a^2}{R^3} + \frac{1}{R^2} + \frac{3a^2}{R^4}.$$

При $R=1$ производная положительна: $\frac{dU}{dR} = -2a^2 + 1 + 3a^2 = a^2 + 1 \geq 0$ для любого значения a. При $R \to \infty$ главное слагаемое положительное; $\frac{1}{R^2} > 0$. Положение экстремумов зависимости потенциальной энергии от расстояния определяется так:

$$\frac{dU}{dR} = 0; \qquad R^2 - 2a^2 R + 3a^2 = 0.$$

Корни квадратного уравнения: $R_{1,2} = a^2 \pm \sqrt{a^4 - 3a^2} = a^2 \pm a\sqrt{a^2 - 3}$.

Если $a > \sqrt{3}$, то на кривой зависимости потенциальной энергии от расстояния есть два экстремума:

$$R_1^* = a^2 - a\sqrt{a^2 - 3}, \qquad R_2^* = a^2 + a\sqrt{a^2 - 3}.$$

При $R = R_1^*$ потенциальная энергия максимальна, при $R = R_2^*$ – минимальна. Безразмерный радиус круговых орбит зависит от момента импульса, причем $R > 3$.

Если безразмерный момент импульса $a = \sqrt{3}$, то $R = 3$, $U = \sqrt{\frac{8}{9}}$. Движение по такой круговой орбите является неустойчивым.

При энергии больше $U_{\max}$ происходит падение тела на поверхность горизонта событий. Такое явление называется гравитационным захватом. Подчеркнем, что это релятивистский эффект, в классической задаче двух тел гравитационный захват невозможен.

Глава 5. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ КОСМОЛОГИЯ

Космология является быстро развивающейся областью знания о природе. Для нас интересно то, что применение релятивистской теории гравитации для решения космологических проблем позволило в XX в. получить важные и красивые результаты, построить непротиворечивые модели Вселенной, предсказывающие и объясняющие многие эффекты и явления; например: объяснение красного смещения в спектрах удаленных галактик, предсказание и открытие реликтового излучения, а также объяснение распространенности во Вселенной химических элементов. В данной главе рассматриваются стандартные космологические модели, основанные на решениях Фридмана.

§ 1. Однородные и изотропные космологические модели

Как известно, представления о стационарной, однородной и евклидовой Вселенной, которые господствовали на рубеже XIX и XX вв., приводят к многочисленным парадоксам. Упомянем без доказательства только три парадокса. Фотометрический парадокс (парадокс Ольберса) заключается в том, что в такой Вселенной ночное небо должно быть ослепительно ярким. Второй парадокс возникает при попытках применить теорию гравитации Ньютона ко всей Вселенной – гравитационный парадокс (парадокс Зеелигера). Суть его заключается в том, что в однородной евклидовой Вселенной гравитационные силы взаимодействия любого материального объекта со всем веществом Вселенной не определены, а энергия гравитационного взаимодействия бесконечна. И, наконец, термодинамический парадокс, известный также под названием «тепловая смерть Вселенной»: в рассматриваемой модели все источники энергии должны иссякнуть.

Первая релятивистская модель Вселенной была предложена А.Эйнштейном в 1917 г., т.е. через год после создания общей теории относительности. В этой модели пространство обладает постоянной положительной кривизной, которая не зависит от времени – цилиндрический мир Эйнштейна. Исходя из общих представлений о неизменности Вселенной («Вселенная вечна из веков в века»), А.Эйнштейн пытается получить стационарное решение уравнений поля. Но уравнения гравитационного поля такого решения не имеют; в отсутствие градиентов давления и других сил, которые могли бы противостоять силам тяготения, статичность невозможна. Уравнения поля можно получить из вариационного принципа, как независимо от А.Эйнштейна показал Д.Гильберт. При этом можно в действие для гравитационного поля S_g добавить совершенно «безопасное» слагаемое 2Λ:

$$S_g = -\frac{c^3}{16\pi G}\int (R + 2\Lambda)\sqrt{-g}\, d\Omega . \tag{5.1}$$

Здесь c – скорость света, G – гравитационная постоянная, R – скалярная кривизна, Λ – космологическая постоянная, g – фундаментальный определитель, $d\Omega$ – дифференциал 4-объема. Так и поступает А.Эйнштейн. Он модифицирует уравнения поля, вводя слагаемое, пропорциональное метрическому тензору:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ik} + \Lambda g_{ik} . \tag{5.2}$$

Здесь g_{ik} – метрический тензор, R_{ik} – тензор Риччи, T_{ik} – тензор энергии-импульса материи. Космологическая постоянная, величина которой подобрана соответствующим образом, характеризует некоторые (гипотетические) силы отталкивания.

В 1922-1924 гг. А.А.Фридман показывает, что статический мир Эйнштейна является лишь частным решением модифицированных уравнений поля (причем неустойчивым), а в отсутствие космологической постоянной возможны только решения, зависящие от времени, т.е. релятивистские модели Вселенной могут быть только нестационарными. Возникает вопрос, что делать с космологической постоянной? Необходимость ее введения ничем, кроме желания получить стационарное решение, не диктуется, но существование ее возможно. Эйнштейн после открытия Фридманом нестационарных решений заявил, что введение космологической постоянной было ненужным осложнением теории. Но теперь нельзя просто отбросить постоянную Λ: астрономические данные не опровергают возможности ее существования, требуя лишь ее малости. Более того, необходимо либо доказывать равенство ее нулю, либо объяснять как ее малую величину, так и природу этих гипотетических сил отталкивания. Один из создателей современной релятивистской астрофизики Я.Б.Зельдович в связи с этим отмечал, что, как говорят на Востоке, джинна из бутылки выпустить бывает легко, а загнать его обратно – очень трудно. Заметим, что в последнее время снова появился интерес к моделям с ненулевой космологической постоянной.

Ниже мы рассмотрим изотропные космологические модели Фридмана, космологическую постоянную будем считать равной нулю. Решения Фридмана получены в предположении однородности и изотропии распределения вещества во Вселенной (космологический постулат). Разумеется, на малых масштабах вещество во Вселенной распределено достаточно неоднородно. Но при переходе ко все большим и большим масштабам относительная неоднородность плотности вещества уменьшается, и на расстояниях ~ 500 Мпк Вселенную можно считать однородной и изотропной. В пользу этого заключения свидетельствуют астрономические данные о распределении галактик в пространстве, источников радиоизлучения и высокая изотропия реликтового излучения. Есть все основания считать, что однородная и изотропная модель дает адекватное в общих чертах описание не только современного состояния Вселенной, но и ее прошлой эволюции.

Однородность и изотропия пространства позволяют выбрать такое мировое время, чтобы в каждый его момент метрика пространства была одинаковой во всех его точках. Из всех систем отсчета удобнее всего взять такую систему, которая является «сопутствующей» веществу. В этой системе отсчета вещество покоится. Такой выбор представляется естественным, так как существование движения вещества с некоторой скоростью привело бы к анизотропии.

Так как все направления эквивалентны, то компоненты метрического тензора $g_{0\alpha} = 0$. Здесь и далее греческие индексы используются для обозначения пространственных координат. Три компоненты $g_{0\alpha}$ можно рассматривать как компоненты трехмерного вектора; этот вектор, будучи отличным от нуля, делает различные направления в пространстве неравноправными. Тогда выражение для квадрата интервала принимает вид

$$ds^2 = g_{00}\left(dx^0\right)^2 - dl^2 .$$

Компонента g_{00} в силу требования однородности может быть функцией только временной координаты x^0. Выберем временную координату так, чтобы $g_{00} = 1$. Обозначим временную координату $x^0 = ct$, получаем

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dl^2 . \tag{5.3}$$

Введенное таким образом время t является синхронным собственным временем в любой точке пространства. При этом мы можем во всем пространстве синхронизировать часы: условие, необходимое для выполнения этой процедуры, выполнено ($g_{0\alpha}=0$). Теперь все особенности геометрии, включая ее зависимость от времени, описываются выражением для пространственного расстояния dl. Требование изотропии пространства приводит к тому, что его искривленность должна характеризоваться только одной величиной. Мы приходим к необходимости рассмотрения пространств постоянной кривизны, а тогда возможны только три случая пространственной метрики: пространство постоянной положительной кривизны (трехмерная гиперсфера), пространство постоянной отрицательной кривизны (псевдосфера) и пространство нулевой кривизны, т.е. евклидовое плоское пространство.

§ 2. Линейный элемент Робертсона – Уокера

При изучении пространственной метрики удобно рассматривать геометрию трехмерного пространства как геометрию трехмерной изотропной гиперповерхности в фиктивном четырехмерном пространстве. Уравнение гиперповерхности в четырехмерном пространстве можно записать так:

$$\left(x^1\right)^2+\left(x^2\right)^2+\left(x^3\right)^2+\left(x^4\right)^2=\frac{a^2}{k}. \tag{5.4}$$

Величина $C_G=\dfrac{k}{a^2}$ есть гауссова кривизна (внутренняя кривизна) пространства. Радиус кривизны определяется так:

$$\rho=\frac{1}{\sqrt{C_G}}.$$

При $k=+1$ получаем пространство постоянной положительной кривизны (пространство Гаусса), радиус кривизны $\rho=a$. При $k=-1$ имеем пространство постоянной отрицательной кривизны (пространство Лобачевского), радиус кривизны мнимый. Евклидовое пространство при таком рассмотрении является пределом пространства постоянной положительной кривизны при $C_G\to 0$.

Элемент длины на поверхности (5.4) имеет вид

$$\left(dx^1\right)^2+\left(dx^2\right)^2+\left(dx^3\right)^2+\left(dx^4\right)^2=dl^2\,. \tag{5.5}$$

Рассматривая x^1, x^2, x^3 как пространственные координаты, исключим dx^4 с помощью уравнения поверхности. Выражение (5.4) позволяет написать

$$x^1dx^1+x^2dx^2+x^3dx^3+x^4dx^4=0\,,$$

$$dx^4=-\frac{x^1dx^1+x^2dx^2+x^3dx^3}{\left(\frac{a^2}{k}-\left(x^1\right)^2-\left(x^2\right)^2-\left(x^3\right)^2\right)^{1/2}}\,.$$

Тогда выражение для элемента длины (5.5) принимает вид

$$dl^2=\left(dx^1\right)^2+\left(dx^2\right)^2+\left(dx^3\right)^2+\frac{\left(x^1dx^1+x^2dx^2+x^3dx^3\right)^2}{\frac{a^2}{k}-\left(x^1\right)^2-\left(x^2\right)^2-\left(x^3\right)^2}\,. \tag{5.6}$$

Для дальнейших преобразований удобно перейти в трехмерном пространстве к сферическим координатам. Полагая $x^1=x$, $x^2=y$, $x^3=z$, получим

$$x^1=r\sin\vartheta\cos\varphi\,, \tag{5.7}$$

$$x^2=r\sin\vartheta\sin\varphi\,,$$

$$x^3=r\cos\vartheta\,,$$

$$dx^1=dr\sin\vartheta\cos\varphi+r\cos\vartheta\cos\varphi d\vartheta-r\sin\vartheta\sin\varphi d\varphi\,,$$

$$dx^2=dr\sin\vartheta\sin\varphi+r\cos\vartheta\sin\varphi d\vartheta+r\sin\vartheta\cos\varphi d\varphi\,,$$

$$dx^3=dr\cos\vartheta-r\sin\vartheta d\vartheta\,.$$

Выражения (5.7) позволяют записать

$$\left(dx^1\right)^2+\left(dx^2\right)^2+\left(dx^3\right)^2=dr^2+r^2\left(d\vartheta^2+\sin^2\vartheta d\varphi^2\right),$$

$$x^1dx^1+x^2dx^2+x^3dx^3=rdr\,,$$

$$\left(x^1\right)^2+\left(x^2\right)^2+\left(x^3\right)^2=r^2,$$

а выражение для элемента длины перепишется в виде

$$dl^2=dr^2+r^2\left(d\vartheta^2+\sin^2\vartheta d\varphi^2\right)+\frac{r^2dr^2}{\frac{a^2}{k}-r^2}.$$

Приводя подобные, получаем

$$dr^2+\frac{r^2dr^2}{\frac{a^2}{k}-r^2}=dr^2+\frac{r^2dr^2\frac{k}{a^2}}{1-\frac{kr^2}{a^2}}=\frac{dr^2}{1-\frac{kr^2}{a^2}},$$

$$dl^2=\frac{dr^2}{1-\frac{kr^2}{a^2}}+r^2\left(d\vartheta^2+\sin^2\vartheta d\varphi^2\right). \tag{5.8}$$

Выражение (5.8) позволяет обсуждать геометрические свойства пространства изотропных космологических моделей. В настоящее время в работах, посвященных проблемам космологии, используется выражение для квадрата пространственного расстояния, пропорциональное его значению в случае евклидового пространства (используются конфорно-евклидовые координаты). Сделаем замену переменных:

$$r=\frac{\rho}{1+\frac{k\rho^2}{4a^2}},\qquad dr=d\rho\frac{1-\frac{k\rho^2}{4a^2}}{\left(1+\frac{k\rho^2}{4a^2}\right)^2},\qquad \frac{dr^2}{1-\frac{kr^2}{a^2}}=\frac{d\rho^2}{\left(1+\frac{k\rho^2}{4a^2}\right)^2}.$$

Тогда выражение (5.8) преобразуется к искомому виду:

$$dl^2=\frac{d\rho^2+\rho^2\left(d\vartheta^2+\sin^2\vartheta d\varphi^2\right)}{\left(1+\frac{k\rho^2}{4a^2}\right)^2}. \tag{5.9}$$

Выражение (5.9) называется линейным элементом Робертсона – Уокера. Иногда линейный элемент удобно использовать в другой форме. Прежде всего, перейдем к безразмерной радиальной координате r (не путать с r в(5.7)). Положим $\rho = ar$, величина радиуса кривизны является естественным пространственным масштабом. Из (5.9) получаем

$$dl^2 = a^2 \frac{dr^2 + r^2\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2\right)}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^2}. \tag{5.10}$$

Заметим, что при этом возможная временная эволюция метрики отражается только в зависимости от времени пространственного масштаба, т.е. величины a.

В случае пространства постоянной положительной кривизны ($k = +1$) можно выполнить следующую замену переменной r:

$$\sin R = \frac{r}{1 + \frac{r^2}{4}}.$$

Такая замена возможна; при $0 \le r < \infty$ величина дроби в правой части этого выражения изменяется от 0 до 0, максимальное значение равно единице при $r = 2$. Угловая переменная R изменяется при этом от нуля до π. После необходимых преобразований получаем

$$dl^2 = a^2(t)\left[dR^2 + \sin^2 R\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2\right)\right].$$

Если $k = -1$, т.е. рассматривается пространство постоянной отрицательной кривизны, естественной является такая замена:

$$\operatorname{sh} R = \frac{r}{1 - \frac{r^2}{4}},$$

и линейный элемент приобретет вид

$$dl^2 = a^2(t)\left[dR^2 + \operatorname{sh}^2 R\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2\right)\right].$$

Наконец, для плоского пространства ($k = 0$) имеем $R = r$. Сводя вместе три случая, получаем

$$dl^2 = a^2(t)\left[dR^2 + \Phi^2(R)\left(d\varphi^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2\right)\right], \tag{5.11}$$

$$\Phi(R) = \begin{cases} \sin R, & k = +1, \\ \operatorname{sh} R, & k = -1, \\ R, & k = 0. \end{cases}$$

§ 3. Геометрические свойства однородных изотропных моделей

Анализ геометрических свойств однородных изотропных моделей Вселенной начнем с рассмотрения пространства постоянной положительной кривизны. Выражение для линейного элемента примем в форме (5.11). Очевидно, что в силу однородности пространства начало координат можно выбрать в любой точке. Расстояние от начала координат определяется величиной координаты R и равно aR. Площадь поверхности сферы с центром в начале координат равна $4\pi a^2 \sin^2 R$. С увеличением радиуса сферы ее площадь сначала увеличивается от нуля до максимального значения, равного $4\pi a^2$, которое достигается на расстоянии $\pi a/2$ от начала координат. С дальнейшим увеличением координаты R площадь сферы уменьшается и при $R = \pi$ становится равной нулю.

Любопытно отметить, что при этом происходит своеобразный «выворот» сферы. Если проследить за изменением кривизны сферы с ростом радиальной координаты R, то можно обнаружить (соответствующие выкладки опускаем), что при $0 < R < \pi/2$ сфера обращена выпуклостью от центра и с увеличением R ее кривизна уменьшается. При $R = \pi/2$ поверхность сферы становится плоской! С дальнейшим увеличением R сфера обращена выпуклостью к центру координат.

Объем пространства с положительной кривизной оказывается конечным:

$$V = \int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} a^3 \sin^2 R \sin\vartheta \, dR \, d\vartheta \, d\varphi = 2\pi^2 a^3 .$$

Трехмерное пространство постоянной положительной кривизны замкнуто на себя, объем конечен, границ нет. Такая космологическая модель называется закрытой.

Перейдем к рассмотрению геометрических свойств пространства постоянной отрицательной кривизны. Расстояние от начала координат по-прежнему определяется величиной координаты R и равно aR, при этом $0 \le R < \infty$. Площадь поверхности сферы радиуса aR

равна теперь $4\pi a^2 \operatorname{sh}^2 R$ и с ростом R увеличивается неограниченно. Объем такого пространства, естественно, бесконечен:

$$V = \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} a^3 \operatorname{sh}^2 R \sin\vartheta \, dR \, d\vartheta \, d\varphi = \infty .$$

Такая модель называется открытой.

Случай пространства нулевой кривизны не требует особого обсуждения. Мы получаем открытый мир с евклидовой пространственной метрикой. Величина a теперь является просто произвольным масштабным фактором.

§ 4. Уравнения Фридмана

Для вывода уравнений Фридмана воспользуемся выражением для линейного элемента Робертсона – Уокера в форме(5.10), осуществив обратный переход к декартовым координатам:

$$x = x^1 , \quad y = x^2 , \quad z = x^3 ; \quad t = x^0 .$$

Введем обозначение

$$\varphi = \frac{1}{1 + \frac{k\left(x^2 + y^2 + z^2\right)}{4}} .$$

Тогда выражение для квадрата интервала примет вид

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t)\varphi^2\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right).$$

Ко- и контравариантные компоненты метрического тензора таковы:

$$g_{00} = c^2 , \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -a^2(t)\varphi^2 ; \tag{5.12}$$

$$g^{00} = \frac{1}{c^2} , \quad g^{11} = g^{22} = g^{33} = -\frac{1}{a^2(t)\varphi^2} .$$

Уравнения поля Эйнштейна запишем в смешанных компонентах:

$$R_i^k - \frac{1}{2} R \delta_i^k = \frac{8\pi G}{c^4} T_i^k . \tag{5.13}$$

Тензор энергии-импульса имеет вид

$$T_i^k = (\varepsilon + p) u^k u_i - p \delta_i^k . \tag{5.14}$$

Здесь, как обычно, $\varepsilon = \rho c^2$ – плотность энергии, p – давление, u^i – 4-скорость. В синхронной системе вещество покоится, поэтому 4-скорость $u^i = (1,0)$. Таким образом, компоненты тензора энергии-импульса $T_0^0 = \varepsilon$, $T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = -p$. Остальные компоненты равны нулю.

Для вычисления компонент тензора Риччи необходимо знать значения символов Кристоффеля. Запишем выражения для символов Кристоффеля, выделяя пространственные и временной индексы; точкой сверху будем обозначать дифференцирование по t:

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{g^{00}}{2}\left(\frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^0}\right) = 0 \text{ (т.к. } g_{00} = c^2 \text{)},$$

$$\Gamma_{00}^\alpha = \frac{g^{\alpha\alpha}}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha 0}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0\alpha}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\alpha}\right) = 0 \text{ (т.к. } g_{\alpha 0} = 0 \text{)},$$

$$\Gamma_{\alpha 0}^0 = \frac{g^{00}}{2}\left(\frac{\partial g_{0\alpha}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha 0}}{\partial x^0}\right) = 0 ,$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^0 = \frac{g^{00}}{2}\left(\frac{\partial g_{0\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\beta 0}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^0}\right) = 0 ,$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^0 = \frac{g^{00}}{2}\left(\frac{\partial g_{0\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\beta 0}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^0}\right) = 0 \text{ (при } \alpha \neq \beta \text{)},$$

$$\Gamma_{\alpha\alpha}^0 = \frac{g^{00}}{2}\left(\frac{\partial g_{0\alpha}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial g_{\alpha 0}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\alpha}}{\partial x^0}\right) = -\frac{g^{00}}{2}\frac{\partial g_{\alpha\alpha}}{\partial x^0} = \frac{a\dot{a}}{c^2}\varphi^2 ,$$

$$\Gamma_{0\beta}^\alpha = \frac{g^{\alpha\alpha}}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha 0}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{0\alpha}}{\partial x^\beta}\right) = 0 \text{ (при } \alpha \neq \beta \text{)},$$

$$\Gamma^{\alpha}_{0\alpha} = \frac{g^{\alpha\alpha}}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha 0}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial g_{\alpha\alpha}}{\partial x^{0}} - \frac{\partial g_{0\alpha}}{\partial x^{\alpha}}\right) = \frac{g^{\alpha\alpha}}{2}\frac{\partial g_{\alpha\alpha}}{\partial x^{0}} = \frac{\dot{a}}{a} .$$

Заметим, что $\dfrac{\partial \mathrm{j}}{\partial x^{\alpha}} = -\dfrac{kx^{\alpha}}{2}\mathrm{j}^{2}$.

$$\Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta} = \frac{g^{\alpha\alpha}}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\beta\alpha}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\alpha}}\right) = \frac{g^{\alpha\alpha}}{2}\frac{\partial g_{\alpha\alpha}}{\partial x^{\beta}} = -\frac{kx^{\beta}}{2}\varphi \ \ (\alpha \neq \beta),$$

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta} = \frac{g^{\alpha\alpha}}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\beta\alpha}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial g_{\beta\beta}}{\partial x^{\alpha}}\right) = -\frac{g^{\alpha\alpha}}{2}\frac{\partial g_{\beta\beta}}{\partial x^{\alpha}} = \frac{kx^{\alpha}}{2}\varphi \ \ (\alpha \neq \beta),$$

$$\Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha} = \frac{g^{\alpha\alpha}}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\alpha}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial g_{\alpha\alpha}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\alpha}}{\partial x^{\alpha}}\right) = \frac{g^{\alpha\alpha}}{2}\frac{\partial g_{\alpha\alpha}}{\partial x^{\alpha}} = -\frac{kx^{\alpha}}{2}\varphi ,$$

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{g^{\alpha\alpha}}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial g_{\gamma\alpha}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\alpha}}\right) = 0 .$$

Для удобства дальнейшего использования сведем вместе символы Кристоффеля, имеющие ненулевые значения:

$$\Gamma^{0}_{\alpha\alpha} = \frac{a\dot{a}}{c^{2}}\varphi^{2} , \quad \Gamma^{\alpha}_{0\alpha} = \frac{\dot{a}}{a} , \quad \Gamma^{\alpha}_{\beta\beta} = \frac{kx^{\alpha}}{2}\varphi \ \ (\alpha \neq \beta), \quad \Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta} = -\frac{kx^{\beta}}{2}\varphi .$$

Для получения уравнений Фридмана достаточно вычислить только два компонента тензора Риччи: R_{00} и R_{11}. Запишем выражение для R_{00}:

$$R_{00} = \frac{\partial \Gamma^{l}_{00}}{\partial x^{l}} - \frac{\partial \Gamma^{l}_{0l}}{\partial x^{0}} + \Gamma^{l}_{00}\Gamma^{m}_{lm} - \Gamma^{m}_{0l}\Gamma^{l}_{0m} .$$

Заметим, что первое и третье слагаемые обращаются в нуль, вычисление оставшихся слагаемых дает

$$\frac{\partial \Gamma^{l}_{0l}}{\partial x^{0}} = 3\frac{a\ddot{a} - \dot{a}^{2}}{a^{2}} , \quad \Gamma^{m}_{0l}\Gamma^{l}_{0m} = \Gamma^{\alpha}_{0\alpha}\Gamma^{\alpha}_{0\alpha} = 3\frac{\dot{a}^{2}}{a^{2}} .$$

В результате компонента R_{00} выглядит очень просто:

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a} . \tag{5.15}$$

Вычисление компоненты R_{11} (очевидно, $R_{11} = R_{22} = R_{33}$) более громоздко, приведем здесь только конечный результат:

$$R_{11} = \left(\frac{2\dot{a}^2 + a\ddot{a}}{c^2} \right) \varphi^2 + 2k\varphi^2 . \qquad (5.16)$$

Зная R_{00} и R_{11}, легко получить значение скалярной кривизны:

$$R = g^{00}R_{00} + g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} + g^{33}R_{33} = g^{00}R_{00} + 3g^{11}R_{11} .$$

Тогда компоненты $\binom{0}{0}$ и $\binom{1}{1}$ уравнений поля принимают вид

$$R_0^0 - \frac{1}{2}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_0^0 , \text{ или } \frac{1}{2}g^{00}R_{00} - \frac{3}{2}g^{11}R_{11} = \frac{8\pi G}{c^4}T_0^0 , \qquad (5.17)$$

$$R_1^1 - \frac{1}{2}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_1^1 , \text{ или } -\frac{1}{2}g^{00}R_{00} - \frac{1}{2}g^{11}R_{11} = \frac{8\pi G}{c^4}T_1^1 . \qquad (5.18)$$

Подставляя необходимые выражения для компонент метрического тензора, тензора Риччи и тензора энергии-импульса, получаем после простых преобразований искомые уравнения Фридмана:

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{kc^2}{a^2} + \frac{8\pi G}{c^2}p = 0 , \qquad (5.19)$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{kc^2}{a^2} - \frac{8\pi G}{3}\rho = 0 . \qquad (5.20)$$

Для получения зависимости от времени кривизны сопутствующего пространства уравнения (5.19)-(5.20) должны быть дополнены уравнением состояния.

§ 5. Эволюция закрытой пылевой Вселенной

Рассмотрение закономерностей эволюции Вселенной начнем с предельной ситуации, когда вещество, заполняющее Вселенную, является пылью, а излучения нет. При этом давление отсутствует: $p = 0$, а величина ρ является средней плотностью вещества. Этот модельный случай может служить удовлетворительным описанием текущего состояния Вселенной; для совокупности галактик $p \ll \rho c^2$. Уравнения Фридмана принимают вид

$$2\frac{\ddot{a}}{a}+\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2+\frac{kc^2}{a^2}=0\,, \qquad (5.21)$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2+\frac{kc^2}{a^2}-\frac{8\pi G}{3}\rho=0\,.$$

Данная система имеет интеграл движения. Запишем второе уравнение из (5.21) в виде

$$\frac{8\pi G}{3}\rho a^3=a\dot{a}^2+kac^2\,.$$

После дифференцирования этого уравнения по времени получаем

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{8\pi G}{3}\rho a^3\right)=\dot{a}^3+2a\dot{a}\ddot{a}+k\dot{a}c^2\,.$$

Если первое уравнение из (5.21) умножить на $a^2\dot{a}$, то получится следующее:

$$2a\dot{a}\ddot{a}+\dot{a}^3+k\dot{a}c^2=0\,.$$

Таким образом, в ходе эволюции пылевой Вселенной остается постоянной величина, пропорциональная количеству вещества в некотором выделенном объеме:

$$\frac{8\pi G}{3}\rho a^3=const\,.$$

Этот вывод справедлив как для закрытой модели, так и для открытых моделей Вселенной, в которой отсутствует давление.

Введем величину a_m соотношением $a_m=\frac{8\pi G}{3c^2}\rho a^3$. В случае постоянной положительной кривизны сопутствующего пространства a_m имеет ясный смысл. Если положить $\dot{a}=0$ (остановка расширения), то из второго уравнения в (5.21) получаем после умножения на a^3/c^2

$$a-\frac{8\pi G}{3c^2}\rho a^3=0\,; \qquad a=a_m\,,$$

т.е. a_m суть величина радиуса кривизны пространства Вселенной в фазе максимального расширения.

Тогда из второго уравнения в (5.21) после умножения на a^3 получаем

$$a\dot{a}^2 + kac^2 = a_m c^2 . \qquad (5.22)$$

Для решения уравнения (5.22) воспользуемся дуговым временем η, которое вводится соотношением

$$cdt = ad\eta . \qquad (5.23)$$

Такое время называют также конформным. После замены переменных в (5.22) получаем (теперь ограничиваемся случаем $k = +1$)

$$dt = \frac{a}{c}d\eta , \qquad \frac{1}{a}\left(\frac{da}{d\eta}\right)^2 + a = a_m , \qquad \frac{da}{d\eta} = \sqrt{a(a_m - a)} ,$$

$$\int \frac{da}{\sqrt{a(a_m - a)}} = \int d\eta , \qquad 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{a}{a_m - a}} = \eta + b ,$$

$$\frac{a}{a_m - a} = \mathrm{tg}^2\,\frac{\eta + b}{2} ,$$

$$a = a_m \frac{tg^2\,\frac{\eta + b}{2}}{1 + tg^2\,\frac{\eta + b}{2}} = a_m \sin^2\frac{\eta + b}{2} = \frac{a_m}{2}\left[1 - \cos(\eta + b)\right] .$$

Выберем постоянную интегрирования b (начало отсчета дугового времени) так, чтобы при $\eta = 0$ величина радиуса кривизны была бы нулевой: $a = 0$. Тогда получаем зависимость радиуса кривизны от дугового времени:

$$a = \frac{a_m}{2}(1 - \cos\eta) . \qquad (5.24)$$

Видно, что дуговое время меняется в пределах $0 \le \eta \le 2\pi$ (см. рис. 9).

Зависимость координаты t от дугового времени получается из (5.23) с использованием (5.24):

$$dt = \frac{a_m}{2c}(1 - \cos\eta)d\eta , \qquad t = \frac{a_m}{2c}(\eta - \sin\eta) + d .$$

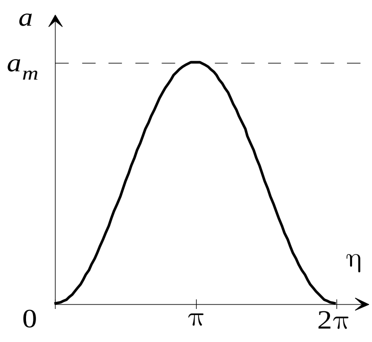

Рис. 9. Зависимость радиуса кривизны от дугового времени

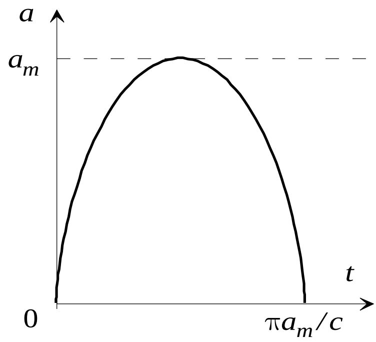

Рис. 10. Зависимость радиуса кривизны от времени

Выберем постоянную d так, чтобы $t=0$ при $\eta=0$. В результате зависимость «физического» времени от дугового такова:

$$t=\frac{a_m}{2c}(\eta-\sin\eta). \tag{5.25}$$

Формулы (5.24)-(5.25) определяют параметрическую зависимость радиуса кривизны пространства от времени. Зависимость $a(t)$ приведена на рис. 10.

Перейдем к обсуждению этого решения Фридмана. Дуговое время меняется в пределах $0\le\eta\le 2\pi$, поэтому время T существования закрытой пылевой Вселенной ограничено; согласно (5.25) $T=\frac{\pi a_m}{c}$.

Если световой сигнал «начнет свое путешествие» из начала системы координат в момент $t=0$, то к окончанию времени существования Вселенной свет пройдет расстояние πa_m. Легко видеть, что дуговое время есть не что иное, как введенная ранее радиальная координата R. Таким образом, за все время существования пылевой закрытой Вселенной световой сигнал вернется «к месту старта», пробежав всю Вселенную.

Существуют два состояния, при котором $a=0$: в прошлом и будущем. В таких состояниях плотность вещества становится бесконечной – космологические сингулярности. Вблизи сингулярностей велика и величина $\dot{a}$:

$$\frac{da}{dt} = \frac{da}{d\eta}\frac{d\eta}{dt} = \frac{c\sin\eta}{1-\cos\eta},$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{da}{dt} = \lim_{\eta\to 0}\frac{c\sin\eta}{1-\cos\eta} = \lim_{\eta\to 0}\frac{c\cos\eta}{\sin\eta} = \infty .$$

Отметим, что это ни в коей мере не противоречит требованиям специальной теории относительности. Бесконечная величина $\dot{a}$ не приводит к наблюдаемой бесконечной скорости удаления двух любых точек во Вселенной, так как. в нашей системе отсчета эти точки разделены пространственно-подобным интервалом и причинно не связаны.

Кривизна пространства согласно второму уравнению из (5.21) в процессе эволюции Вселенной такова:

$$C_G = \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3c^2}\rho - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 . \qquad (5.26)$$

Преобразуем это выражение, заметив, что $H(t) = \dot{a}/a$, где $H(t)$ – текущее значение постоянной Хаббла.

$$C_G = \frac{8\pi G}{3c^2}\rho - \frac{H^2}{c^2} = \frac{8\pi G}{3c^2}(\rho - \rho_c); \qquad \rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} .$$

Величина ρ_c называется критической плотностью. Таким образом, знак кривизны определяется следующим критерием для плотности: если $\rho > \rho_c$, то $C_G > 0$ – кривизна положительна; если $\rho < \rho_c$, то $C_G < 0$ – кривизна отрицательна.

В процессе эволюции Вселенной сохраняется соотношение текущей средней плотности и текущей критической плотности, сохраняется и знак кривизны. Покажем это на примере пылевой модели. Действительно,

$$C_G = \frac{8\pi G}{3c^2}\rho - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{a_m}{a^3} - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 .$$

Так как (см. выше) $\dot{a} = c\sin\eta/(1-\cos\eta)$, то при любом значении дугового времени

$$C_G = \frac{8a_m}{a_m^3(1-\cos\eta)^3} - \frac{1}{c^2}\cdot\frac{4c^2\sin^2\eta}{a_m^2(1-\cos\eta)^4} = \frac{8}{a_m^2(1-\cos\eta)^2} > 0 .$$

§ 6. Эволюция закрытой радиационной Вселенной

Рассмотрим противоположный предельный случай. Пусть вещество отсутствует, Вселенная заполнена только излучением, уравнение состояния тогда предельно жесткое, $p = \varepsilon/3$. Такая модельная ситуация весьма интересна. Во-первых, отметим, что число фотонов в наблюдаемой Вселенной очень велико. Измерения интенсивности реликтового излучения свидетельствуют, что концентрация реликтовых фотонов составляет в среднем 400-500 фотонов в кубическом сантиметре. Таким образом, на каждый нуклон приходится $\sim 10^9$ фотонов микроволнового фонового излучения. Во-вторых, в процессе расширения Вселенной концентрация нуклонов меняется как a^{-3}, а концентрация фотонов пропорциональна a^{-4}. Таким образом, на ранних этапах расширения горячей Вселенной основной вклад в среднюю плотность энергии вносит излучение. На ранних этапах материя, заполняющая Вселенную, представляет собой фотонный «бульон» с чрезвычайно незначительной примесью вещества. Такую Вселенную принято называть радиационно-доминированной.

Уравнения Фридмана в случае фотонного уравнения состояния имеют следующий вид:

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{kc^2}{a^2} + \frac{8\pi G}{3}\rho = 0, \tag{5.27}$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{kc^2}{a^2} - \frac{8\pi G}{3}\rho = 0,$$

где введена эффективная плотность $\rho = \varepsilon/c^2$.

В ходе расширения сохраняется величина $8\pi G a^4 \rho/3$. Действительно, из второго уравнения в (5.27) имеем

$$\frac{8\pi G\rho}{3}a^4 = a^2\dot{a}^2 + ka^2c^2 .$$

Продифференцируем полученное уравнение по времени:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{8\pi G\rho}{3}a^4\right) = 2a\dot{a}^3 + 2a^2\dot{a}\ddot{a} + 2ka\dot{a}c^2 .$$

Сложив уравнения (5.27), получаем

$$\frac{\ddot{a}}{a}+\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2+\frac{kc^2}{a^2}=0 .$$

После умножения полученного уравнения на $2\dot{a}a^3$ получаем

$$2a\dot{a}^3+2a^2\dot{a}\ddot{a}+2ka\dot{a}c^2=0 .$$

Таким образом, $\frac{8\pi G\rho}{3}a^4=const\equiv a_m^2c^2$. Тогда из второго уравнения в (5.27) имеем

$$a^2\dot{a}^2=c^2\left(a_m^2-ka^2\right). \qquad (5.28)$$

Для решения уравнения (5.28) в случае $k=+1$ воспользуемся дуговым временем:

$$\left(\frac{da}{d\eta}\right)^2=a_m^2-a^2; \qquad \frac{da}{\sqrt{a_m^2-a^2}}=d\eta .$$

Последнее уравнение после замены переменной $a=a_m\sin b$ приобретает простой вид: $db=d\eta$, откуда $b=\eta+\eta_0$; $a=a_m\sin\left(\eta+\eta_0\right)$. Выберем постоянную интегрирования η_0 так, чтобы при $\eta=0$ радиус кривизны был нулевым. Для этого нужно положить $\eta_0=0$. Окончательно получаем:

$$a=a_m\sin\eta .$$

Фотонная Вселенная существует в течение дугового времени π. Интегрирование выражения (5.23) дает $t-t_0=-\frac{a_m}{c}\cos\eta$. Выберем t_0 так, чтобы $t=0$ при $\eta=0$. Для этого необходимо положить $t_0=a_m/c$. В результате получаем

$$t=\frac{a_m}{c}\left(1-\cos\eta\right).$$

Закрытая радиационная Вселенная существует в течение

$$T = \frac{2a_m}{c} < \frac{\pi a_m}{c} .$$

За это время свет пройдет расстояние $\Delta R = \pi$, что в два раза меньше, чем в случае пылевой Вселенной.

Некоторое время назад в литературе обсуждался такой эксперимент. Если наша Вселенная закрытая, то свет от мощного источника, распространяясь по радиальным геодезическим, в «противоположной» точке Вселенной должен образовать изображение источника. На роль такого мощного источника идеально подходят квазары. Так как существуют локальные флюктуации кривизны пространства, то в одном направлении мы должны наблюдать квазар, а в противоположном – множество идентичных по характеристикам копий (так называемые ду́хи). Сказанное выше не позволяет экспериментально найти ответ на вопрос, является ли наша Вселенная закрытой. Для этого с момента рождения Вселенной прошло слишком мало времени.

§ 7. Открытые модели радиационной Вселенной

При $k = 0$ уравнение (5.28) приобретает вид

$$a\dot{a} = a_m c .$$

Для однообразия решение запишем в параметрическом виде. Вводя прежним способом дуговое время, имеем $a = a_m \eta + a_0$. Постоянную a_0 естественно выбрать равной нулю. Получаем

$$a = a_m \eta ; \qquad t = \frac{a_m}{c} \cdot \frac{\eta^2}{2} ; \qquad a = \sqrt{2 a_m c t} .$$

В случае $k = -1$ уравнение (5.28) принимает следующий вид:

$$a^2 \dot{a}^2 = c^2 \left(a_m^2 + a^2 \right).$$

После введения дугового времени получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{da}{\sqrt{a_m^2 + a^2}} = d\eta ,$$

которое после замены переменной $a = a_m \operatorname{sh} b$ принимает простой вид: $db = d\eta$. Отсюда

$$a = a_m \operatorname{sh}\eta, \qquad t = \frac{a_m}{c}(\operatorname{ch}\eta - 1).$$

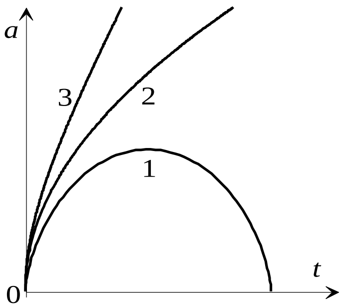

Рис. 11. Три решения Фридмана: k = 1, 0, -1 (кривые 1-3)

На рис. 11 сведены вместе три варианта временной эволюции фотонной Вселенной. В случае $k = 0$ величина a, как уже говорилось, суть некоторая единица измерения расстояния. При $k = -1$ величина a суть модуль радиуса кривизны.

Отметим, что на ранних этапах расширения Вселенной, когда $\eta \ll 1$, при любом соотношении средней плотности ρ и критической плотности ρ_c зависимости от времени масштабного фактора a одинаковы:

$$a = a_m\eta; \qquad t = \frac{a_m\eta^2}{2c}, \qquad a = \sqrt{2a_m ct}.$$

§ 8. Инфляционная Вселенная

В рамках стандартной горячей космологической модели, основанной на решениях Фридмана, хорошо описывается совокупность данных наблюдений. Однако некоторые свойства наблюдаемой Вселенной такой моделью не могут быть объяснены. К числу таких свойств относится, например, крупномасштабная однородность и изотропия Вселенной. Действительно, области Вселенной, расположенные на горизонте событий в противоположных относительно наблюдателя направлениях, не могут быть причинно связаны. Следовательно, не могут существовать физические процессы, обеспечивающие равенство плотности материи в этих областях. Результаты наблюдений свидетельствуют о том, что микроволновое фоновое излучение изотропно с высокой степенью точности. Стандартная модель не объясняет и причину «первотолчка», а свидетельствует лишь о том, что в настоящее время расширение Вселенной происходит по инерции (с торможением расширения).

Теория инфляционной Вселенной (1981 г.) отказывается от модели Фридмана на ранней стадии расширения. Считается, что еще на стадии, предшествующей созданию барионного заряда, т.е. формированию зарядово-несимметричной Вселенной, расширение происходит по закону нарастания денежной массы в период инфляции, $a \sim \left(1/H\right)\exp Ht$. Константа H есть постоянная Хаббла для инфляционной стадии. Оценки ее величины дают $10^{36} c^{-1} < H < 10^{42} c^{-1}$. Такое, оказывается, возможно, если расширение Вселенной обеспечивается состоянием физических полей, которое описывается уравнением $p = -\varepsilon$ (отрицательное давление).

Продолжительность инфляционной стадии оценивается в $10^{-35} c$, а планковское время $t_g = \sqrt{G\hbar/c^5} \sim 10^{-43} c$. Квантовые эффекты важны, по-видимому, лишь при $t \sim t_g$. Поэтому инфляционная стадия может рассматриваться на основе классических уравнений поля, т.е. в рамках общей теории относительности.

Уравнения Фридмана получены из уравнений поля Эйнштейна для однородной и изотропной Вселенной. Нет оснований для отказа от космологического постулата, поэтому будем считать, что уравнения Фридмана справедливы и для описания инфляционной стадии. Запишем уравнения Фридмана, полагая, как и в случае фотонной Вселенной, $\varepsilon = \rho c^2$. Уравнение состояния примем в виде $p = \alpha\varepsilon$, где α суть некоторая константа:

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{kc^2}{a^2} + 8\pi G\rho\alpha = 0, \tag{5.29}$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{kc^2}{a^2} - \frac{8\pi G\rho}{3} = 0.$$

Вычитая из первого уравнения второе, получаем

$$\ddot{a} = -\frac{4}{3}\pi G\rho\left(1+3\alpha\right)a.$$

При $\alpha = 0$ (пылевая Вселенная, предельно мягкое уравнение состояния) получаем $\ddot{a} = -4\pi G\rho a/3$. В случае радиационной Вселенной $\alpha = 1/3$ (предельно жесткое уравнение состояния) $\ddot{a} = -8\pi G\rho a/3$. И в том, и в другом случае расширение Вселенной происходит с торможением. Давление, образно говоря, тоже «весит», приводя к большему торможению расширения.

Рассмотрим случай $\alpha = -1$, т.е. $p = -\varepsilon$. Уравнения Фридмана таковы:

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{kc^2}{a^2} - \frac{8\pi G}{c^2}\varepsilon = 0 , \tag{5.30}$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{kc^2}{a^2} - \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon = 0 .$$

Из второго уравнения имеем

$$\frac{8\pi G}{c^2} a^3 \varepsilon = \dot{a}^2 a + kc^2 a .$$

После дифференцирования по времени этого уравнения имеем

$$\frac{8\pi G}{3c^2} a^3 \dot{\varepsilon} = 2a\dot{a}\ddot{a} + \dot{a}^3 + kc^2 \dot{a} - \frac{8\pi G}{c^2} a^2 \dot{a}\varepsilon .$$

Если первое уравнение в (5.30) умножим на $\dot{a}a^2$, то получим

$$2a\dot{a}\ddot{a} + \dot{a}^3 + kc^2\dot{a} - \frac{8\pi G}{c^2} a^2 \dot{a}\varepsilon = 0 , \text{ т.е. } \frac{8\pi G}{3c^2} a^3 \dot{\varepsilon} = 0 .$$

В результате приходим к интересному выводу: расширение Вселенной (с отрицательным давлением) происходит при постоянной объемной плотности, что возможно лишь при рождении вещества.

Вычитая из первого уравнения второе, получаем

$$\ddot{a} = \frac{8\pi G\varepsilon}{3c^2} a .$$

Как видно, существование отрицательного давления приводит к движению с положительным ускорением («антигравитация»). Так как $\varepsilon = const$, то $a(t) = Ae^{Ht}$, где $H = \sqrt{8\pi G\varepsilon / 3c^2}$.

Интересно отметить, что пространство Вселенной на инфляционной стадии является плоским. Действительно, из второго уравнения (5.30) имеем

$$C_G = \frac{8\pi G\varepsilon}{3c^2} - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = 0 , \text{ т.к. } \frac{\dot{a}}{a} = H .$$

Состояние с положительной энергией и отрицательным давлением оказывается неустойчивым. В процессе расширения энергия полей ε, ответственных за формирование отрицательного давления, переходит в энергию обычных частиц. При этом вещество и излучение приобретают высокую температуру, формируется радиационно-доминированная Вселенная, для которой $a \sim \sqrt{t}$. Постоянная Хаббла инфляционной стадии очень велика, поэтому вся наблюдаемая Вселенная может быть результатом расширения одной причинно-связанной области.

§ 9. Космологическая постоянная

Как уже говорилось вначале, в последнее время резко возрос интерес к космологическим моделям с космологической постоянной, не равной нулю. При этом считается, что в среднюю плотность энергии вносят вклад «обычное» вещество, ненаблюдаемое вещество (скрытая, или темная масса – dark matter), а также некоторая «вакуумная материя», связанная с Λ-членом. Теперь ее чаще называют «темной энергией» (dark energy), или квинтэссенцией. Уравнения поля, содержащие космологическую постоянную, в смешанных компонентах имеют вид

$$R_i^k - \frac{1}{2} R \delta_i^k = \frac{8\pi G}{c^4} T_i^k + \Lambda \delta_i^k . \qquad (5.31)$$

Видно, что «вакуумная материя» характеризуется тензором энергии-импульса $T_i^k = \left(c^4 \Lambda / 8\pi G \right) \delta_i^k$, что соответствует уравнению состояния

$$\varepsilon_\Lambda = -p_\Lambda = \frac{c^4 \Lambda}{8\pi G} . \qquad (5.32)$$

В этом случае уравнения Фридмана принимают вид

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{kc^2}{a^2} + \frac{8\pi G}{c^2} \left(p + p_\Lambda \right) = 0 , \qquad (5.33)$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{kc^2}{a^2} - \frac{8\pi G}{3c^2} \left(\varepsilon + \varepsilon_\Lambda \right) = 0 . \qquad (5.34)$$

Перепишем уравнения (5.33)-(5.34) в другом виде, вычитая из первого уравнения второе:

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}\left(\varepsilon + 3p + \varepsilon_\Lambda + 3p_\Lambda\right) = -\frac{8\pi G}{3c^2}\left(\varepsilon + 3p - 2\varepsilon_\Lambda\right), \qquad (5.35)$$

$$\frac{1}{2}\dot{a}^2 = \frac{4\pi G a^2}{3c^2}\left(\varepsilon + \varepsilon_\Lambda\right) - \frac{kc^2}{2}. \qquad (5.36)$$

Прежде всего отметим, что теперь возможно статическое решение. Действительно, если положить $\varepsilon_\Lambda = (\varepsilon + 3p)/2$, а $k = 1 = 4\pi G a^2 (\varepsilon + p)/c^4$, то из (5.35) и (5.36) следует, что

$$\ddot{a} = 0, \quad \dot{a} = 0, \quad a = const.$$

Мы получаем статический замкнутый мир Эйнштейна, его радиус кривизны выражается через плотность и давление материи.

В 1967 г. И.С.Шкловский и Н.С.Кардашев предложили космологическую модель с Λ-членом, величина которого подобрана так, чтобы расширение на определенном этапе имело длительную задержку. Сделано это было для объяснения большого количества квазаров, для которых красное смещение $z = 1.95$ (казалось, что есть такие данные астрономических наблюдений). Действительно, можно подобрать величину космологической постоянной так, что на некотором этапе такая модель оказывается очень близкой к статическому миру Эйнштейна, при этом продолжительность задержки расширения может быть очень большой. Покажем это на примере пылевой закрытой модели. Уравнения Фридмана в этом случае запишутся так ($p = 0$, $\varepsilon = \rho c^2$):

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{kc^2}{a^2} - \frac{8\pi G}{c^2}\varepsilon_\Lambda = 0, \qquad (5.37)$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{kc^2}{a^2} - \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon_\Lambda = 0. \qquad (5.38)$$

Из второго уравнения получаем

$$\frac{8\pi G a^3}{3} = a\dot{a}^2 + kac^2 - \frac{8\pi G}{3c^2}a^3\varepsilon_\Lambda,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{8\pi G a^3}{3}\right) = \dot{a}^3 + 2a\dot{a}\ddot{a} + k\dot{a}c^2 - \frac{8\pi G}{c^2}a^2\dot{a}\varepsilon_\Lambda.$$

Первое уравнение после умножения на $a^2\dot{a}$ дает

$$2a\dot{a}\ddot{a}+\dot{a}^3+k\dot{a}c^2-\frac{8\pi G}{c^2}a^2\dot{a}\varepsilon_\Lambda=0\,.$$

Таким образом, и теперь $\left(8\pi Ga^3/3\right)=const=a_m c^2$ (см. § 5).

Уравнение (5.38) теперь можно записать в следующем виде:

$$a\dot{a}^2+kac^2-a_m c^2-\frac{8\pi G}{3c^2}a^3\varepsilon_\Lambda=0\,,$$

$$\dot{a}^2=\sqrt{\frac{a_m c^2-kac^2}{a}+\frac{8\pi G}{3c^2}a^2\varepsilon_\Lambda}\,. \tag{5.39}$$

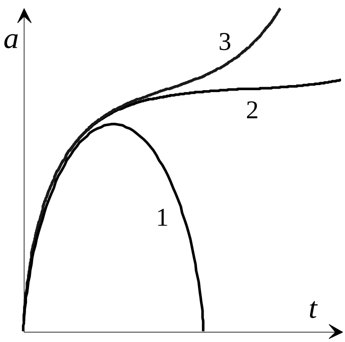

Рис. 12. Эволюция закрытой Вселенной

На рис. 12 приведены результаты численного интегрирования уравнения (5.39) при $k=1$ и трех значений космологической постоянной: $\Lambda=0$ (кривая 1), $\Lambda_3>\Lambda_2>0$ (кривые 2 и 3 соответственно).

Видно, что, подбирая величину космологической постоянной, можно получить ситуацию, когда в течение длительного промежутка времени модель очень близка к статическому миру Эйнштейна. Разумеется, при этом Λ должна быть больше космологической постоянной статического мира.

В настоящее время считается, что современное состояние Вселенной объясняется другой моделью – моделью Эйнштейна – де Ситтера. В.Л. Гинзбург считает, что это утверждение является важным завоеванием последнего времени. В этой модели $\rho=\rho_c$, пространственная метрика мира плоская. Если считать, что в нашу эпоху $H_0=64\pm13$ (Км/с/Мпк), то критическая плотность $\rho_c=8\cdot10^{-30}$ г/см^3. Вместо ρ часто используется величина $\Omega=\rho/\rho_c$. В плоской модели $\Omega=1$. В значение Ω вносят вклад барионы (b), темная материя (d), темная энергия (Λ), $\Omega=\Omega_b+\Omega_d+\Omega_\Lambda$. Оказалось, последние наблюдения свидетельствуют, что $\Lambda\neq0$. Более того, вклад темной энергии в Ω столь велик, что

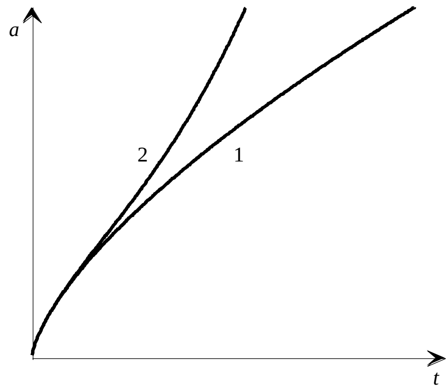

Рис. 13. Эволюция Вселенной Эйнштейна – де Ситтера

в нашу эпоху происходит не замедление расширения Вселенной, напротив, скорость расширения увеличивается! В этом состоит последнее крупное открытие в космологии. Оценки вкладов в Ω таковы: $\Omega_b = 0.03 \pm 0.015$, $\Omega_d = 0.3 \pm 0.1$, $\Omega_\Lambda = 0.7 \pm 0.1$. На рис. 13 показаны результаты интегрирования уравнения (5.39) при $k = 0$, $\Lambda = 0$ (кривая 1) и $\Lambda > 0$ (кривая 2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Новиков И.Д. Черные дыры во Вселенной / И.Д. Новиков, В.П. Фролов. УФН. 2001. Т. 171, № 3. С. 307-324.
2. Тейлор Дж.Х. Двойные пульсары и релятивистская гравитация / Дж.Х. Тейлор. УФН. 1994. Т. 164. № 7. С. 757-764.
3. Ландау Л.Д. Теория поля. Теоретическая физика. Т.II / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. М.: Наука, 1988. 512 с.
4. Зельдович Я.Б. Теория тяготения и эволюция звезд. / Я.Б. Зельдович, И.Д. Новиков. М.: Наука, 1971. 484 с.
5. Зельдович Я.Б. Строение и эволюция Вселенной / Я.Б. Зельдович, И.Д. Новиков. М.: Наука, 1975. 736 с.
6. Физика космоса: Маленькая энциклопедия / М.: Сов. энциклопедия, 1986. 783 с.
7. Мизнер Ч. Гравитация. Т.1-3 / Ч. Мизнер, К. Торн, Дж.М. Уилер. М.: Мир, 1977.
8. Бёрке У. Пространство-время, геометрия, космология / У. Бёрке. М.: Мир, 1985. 416 с.
9. Гинзбург В.Л. О некоторых успехах физики и астрономии за последние три года / В.Л. Гинзбург. УФН. 2002. Т. 172, № 2. С. 213-219.

Учебное издание

Николай Иванович Лобов
Дмитрий Викторович Любимов

Общая теория относительности

Учебно-методическое пособие

Редактор *Н.В. Петрова*
Корректор *А.А. Алексеева*
Компьютерная верстка *Н.И. Лобова*

Подписано в печать 24.05.2012. Формат 60х84/16.
Усл.печ.л. 7,44. Уч.-изд.л. 6,1. Тираж 50 экз. Заказ

Редакционно-издательский отдел Пермского государственного национального исследовательского университета
614990, Пермь, ул. Букирева, 15

Типография Пермского государственного национального исследовательского университета
614990, Пермь, ул. Букирева, 15